Séries numériques

Séries à termes de signe constant

Exercice 1 [01020] [correction]
Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

$$\text{a) } u_n = \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}$$

$$\text{b) } u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\text{c) } u_n = \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 2 [01021] [correction]
Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 1/n^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 3 [01022] [correction]
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes.
Montrer que les suivantes sont aussi convergentes

$$\sum \max(u_n, v_n), \sum \sqrt{u_n v_n} \text{ et } \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$$

Exercice 4 [01023] [correction]
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente. Montrer que $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ est aussi convergente.

Exercice 5 [01024] [correction]
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose que

$$\sqrt[n]{u_n} \to \ell \in \mathbb{R}^+$$

Montrer que si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ est convergente et que si $\ell > 1$, $\sum u_n$ est divergente.
Observer que, lorsque $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

Exercice 6 [01025] [correction]
Soit (u_n) une suite décroissante de réels positifs. On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge. Montrer que $nu_n \to 0$.

Exercice 7 [03233] [correction]
Soient (u_n) une suite décroissante de réels positifs et α un réel positif.
On suppose la convergence de la série

$$\sum n^\alpha u_n$$

Montrer

$$n^{\alpha+1} u_n \to 0$$

Exercice 8 [01026] [correction]
Soient (u_n) une suite de réels positifs et

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$$

Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 9 [01027] [correction]
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.
a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
b) Même question avec $v_n = \frac{u_n}{u_1+\cdots+u_n}$. On pourra étudier $\ln(1-v_n)$ dans le cadre de la divergence.

Exercice 10 [01029] [correction]
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs.
a) On suppose qu'à partir d'un certain rang

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Montrer que $u_n = O(v_n)$.
b) On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha > 1$$

Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que $\sum u_n$ converge.

Exercice 11 [01030] [correction]
Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série absolument convergente et $v_n = u_{\sigma(n)}$ avec $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$.
Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est absolument convergente de même somme de $\sum u_n$.

Exercice 12 [01031] [correction]
Soit $\sigma : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ une application bijective. Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}$.
Même question pour $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sigma(n)}$.

Exercice 13 [01032] [correction]
Montrer que la convergence de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ puis la majoration du reste : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{n.n!}$.

Exercice 14 [02353] [correction]
Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

$$\text{a) } u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \text{ b) } u_n = \frac{1}{n\cos^2 n} \text{ c) } u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

Exercice 15 Centrale MP [02432] [correction]
a) Etudier $\sum u_n$ où $u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\cdots+x^n}$.
b) Etudier $\sum v_n$ où $v_n = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x+\cdots+x^n}$.

Exercice 16 Mines-Ponts MP [02789] [correction]
Nature de la série de terme général

$$\frac{\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2} - \left\lfloor n^{3/2}\right\rfloor + n}$$

Exercice 17 Mines-Ponts MP [02796] [correction]
Soit (u_n) une suite réelle décroissante et positive. On pose

$$v_n = 2^n u_{2^n}$$

Déterminer la nature de $\sum v_n$ en fonction de celle de $\sum u_n$.

Exercice 18 Mines-Ponts MP [02797] [correction]
Soit (u_n) une suite décroissante d'éléments de $\mathbb{R}^+$, de limite 0. Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = n^2 u_{n^2}$. Y a-t-il un lien entre la convergence des séries de termes généraux u_n et v_n ?

Exercice 19 Mines-Ponts MP [02798] [correction]
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) \neq 0$. Etudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}\int_0^{1/n} f(t^n)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 20 Mines-Ponts MP [02800] [correction]
a) Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles, $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0\,;\ \sum |v_n| \text{ converge et } \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n$$

Montrer que $(n^\lambda u_n)$ converge.
b) Nature de la série de terme général

$$\frac{n^n}{n!\mathrm{e}^n}?$$

Exercice 21 X MP [02957] [correction]
Soit (u_n) une suite réelle strictement positive, décroissante, de limite nulle.
On suppose que la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^{n} u_k - n u_n$$

est bornée.
Montrer que la série de terme général u_n converge.

Exercice 22 X MP [02956] [correction]
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$v_n = u_n/S_n \text{ où } S_n = u_1 + \cdots + u_n$$

Déterminer la nature de $\sum v_n$.

Exercice 23 X MP [02958] [correction]
Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que la série de terme général u_n converge.
On note le reste d'ordre n : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
Etudier la nature des séries de termes généraux u_n/R_n et u_n/R_{n-1}.

Exercice 24 X MP [02959] [correction]
Soit (u_n)une suite réelle strictement positive et strictement croissante.
Nature de la série de terme général

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$$

Exercice 25 X MP [02963] [correction]
Si σ est une bijection de $\mathbb{N}^\star$ sur $\mathbb{N}^\star$, montrer que $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

Exercice 26 Centrale MP [02425] [correction]
Soit f une permutation de $\mathbb{N}^\star$.
Etudier la nature des séries de termes généraux $\frac{1}{nf(n)}$, $\frac{f(n)}{n^2}$, $\frac{f(n)}{n\ln n}$, $\frac{f(n)}{n^3}$.

Exercice 27 [01028] [correction]
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de réels strictement positifs.
a) On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer que la série de terme général $v_n = n(u_n - u_{n+1})$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

b) Réciproquement, on suppose que la série de terme général $n(u_n - u_{n+1})$ converge. Montrer que la série de terme général $u_n$converge si, et seulement si, la suite (u_n) converge vers 0.
c) Donner un exemple de suite (u_n) qui ne converge pas vers 0, alors que la série de terme général $n(u_n - u_{n+1})$ converge.

Exercice 28 [02447] [correction]
Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs convergente.
Peut-on préciser la nature de la série de terme général

$$u_n = a_0 a_1 \dots a_n ?$$

Exercice 29 Mines-Ponts PC [03119] [correction]
Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ dans $(\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}$$

Montrer que si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n diverge.

Exercice 30 [03195] [correction]
Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$$

Exercice 31 [03225] [correction]
Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ strictement positive telle que

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \bar{\mathbb{R}}$$

a) On suppose $\ell > -1$ ou $\ell = -1^+$. Montrer la divergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} f(n)$$

b) On suppose $\ell < -1$. Montrer la convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} f(n)$$

Exercice 32 [03235] [correction]
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs. On considère la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} ku_k$$

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature et qu'en cas de convergence

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$$

Séries à termes changeant de signe

Exercice 33 [01033] [correction]
Montrer que la somme d'une série semi-convergente et d'une série absolument convergente n'est que semi-convergente.

Exercice 34 [01034] [correction]
Déterminer la nature de $\sum u_n$ pour :

$$\text{a) } u_n = \frac{1}{n^2+1}$$

$$\text{b) } u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$\text{c) } u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$$

$$\text{d) } u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$$

Exercice 35 [01035] [correction]
Déterminer la nature de

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$$

Exercice 36 [01036] [correction]
Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$ est un réel négatif.

Exercice 37 [01037] [correction]
On rappelle la convergence de l'intégrale de Dirichlet

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

En observant

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{n\pi+t}\,\mathrm{d}t$$

déterminer le signe de I.

Exercice 38 [01038] [correction]
a) Justifier la convergence de la série numérique

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^k}{k}$$

On pose

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}$$

b) Montrer que

$$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k(k+1)}$$

c) Déterminer un équivalent de R_n.
d) Donner la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} R_n$.

Exercice 39 [01039] [correction]
Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{n}\right)$.

Exercice 40 [01040] [correction]
Donner la nature de la série des $\frac{j^n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 41 [01041] [correction]
Soient (a_n) une suite positive décroissante de limite nulle et (S_n) une suite bornée.
a) Montrer que la série $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$ est convergente.
b) En déduire que la série $\sum a_n(S_n - S_{n-1})$ est convergente.
c) Etablir que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, la série $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ est convergente.

Exercice 42 [01042] [correction]
Soit z_n le terme général d'une série complexe convergente. Etablir que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{z_n}{n}$ est convergente.

Exercice 43 [01043] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^n \sin k \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k}$$

a) Montrer que $(\Sigma_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.
b) En déduire que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Exercice 44 [01044] [correction]
Pour $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

a) Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.
b) Montrer que la série correspondant au produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ diverge.

Exercice 45 [01045] [correction]
Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + (-1)^{n-1}}$$

Exercice 46 [02351] [correction]
Déterminer la nature de $\sum u_n$ pour :

$$\text{a) } u_n = \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n} \text{ b) } u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+(-1)^n)} \text{ c) } u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n}$$

Exercice 47 [02352] [correction]
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ non multiple de 2π. On pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \text{ et } u_n = \frac{\cos(n\theta)}{n}$$

a) Montrer que la suite (S_n) est bornée.
b) En observant que $\cos(n\theta) = S_n - S_{n-1}$, établir que la série de terme général u_n converge.
c) En exploitant l'inégalité $|\cos x| \geqslant \cos^2 x$, établir que la série de terme général $|u_n|$ diverge.

Exercice 48 Centrale MP [02443] [correction]
a) Existence de

$$A = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$$

b) Montrer que A se met sous la forme $A = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ avec $u_n \geqslant 0$. En déduire $A \geqslant 0$.
c) Mêmes questions avec

$$B = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \cos(t^2)\mathrm{d}t$$

d) Comment retrouver ces résultats avec un logiciel de calcul formel

Exercice 49 Mines-Ponts MP [02793] [correction]
Convergence de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Exercice 50 Mines-Ponts MP [02794] [correction]
Nature de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$.

Exercice 51 X MP [02962] [correction]
Donner un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0 et dont les sommes partielles sont bornée.

Exercice 52 X PSI [03097] [correction]
On dit que la série de terme général u_n enveloppe le réel A si, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \neq 0 \text{ et } |A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)| \leqslant |u_{n+1}|$$

On dit qu'elle enveloppe strictement le réel A s'il existe une suite $(\theta_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $]0,1[$ telle que pour tout entier naturel n :

$$A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = \theta_{n+1} u_{n+1}$$

a) Donner un exemple de série divergente qui enveloppe $A > 0$.
Donner un exemple de série convergente qui enveloppe un réel.
Donner un exemple de série convergente qui n'enveloppe aucun réel.
b) Démontrer que, si la série de terme général u_n enveloppe strictement A, alors elle est alternée.
Démontrer que A est alors compris entre deux sommes partielles consécutives.
c) Démontrer que, si la série de terme général u_n est alternée et que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$
$A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)$ est du signe de u_{n+1}, alors, elle enveloppe strictement A.
d) Démontrer que, si la série de terme général u_n enveloppe A et si la suite de terme général $|u_n|$ est strictement décroissante, alors, la série est alternée et encadre strictement A.

Exercice 53 [03236] [correction]
Montrer la divergence de la série

$$\sum \frac{\cos(\ln n)}{n}$$

Exercice 54 X MP [01335] [correction]
Etudier la série de terme général

$$u_n = (-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n}$$

Exercice 55 X PC [03207] [correction]
Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que

$$u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n$$

a) Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 2.
b) Soient a et b deux éléments de E déterminés par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = 1 \end{cases}$$

Montrer que les deux suites (a_n) et (b_n) divergent vers $+\infty$.
c) Calculer

$$w_n = a_{n+1} b_n - a_n b_{n+1}$$

d) On pose $c_n = a_n / b_n$ lorsque l'entier n est supérieur ou égal à 1. Démontrer l'existence de

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} c_n$$

e) Démontrer l'existence d'un unique réel r tel que

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + r b_n) = 0$$

Exercice 56 [03208] [correction]
α désigne un réel strictement positif.
Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_0^{(-1)^n/n^\alpha} \frac{\sqrt{|x|}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

Calculs de sommes

Exercice 57 [01046] [correction]
Existence et calcul de

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$$

$$\text{b) } \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{c) } \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n}$$

Exercice 58 [01047] [correction]
On donne $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$$

après en avoir justifier l'existence.

Exercice 59 [01048] [correction]
Nature puis somme de

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Exercice 60 [01049] [correction]
Après en avoir justifié l'existence, calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ sachant } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 61 [01050] [correction]
Sachant $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}$.

Exercice 62 [01051] [correction]
Soit $x \in \left]-1,1\right[$. Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k$.

Exercice 63 [01052] [correction]
Soit $\alpha > 0$. Montrer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 64 [01053] [correction]
On pose

$$u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$$

Montrer que la série $\sum u_n$ converge et que sa somme vaut

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 65 [01054] [correction]
On rappelle l'existence d'une constante γ telle qu'on ait $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.
a) Calculer la somme de la série de terme général $u_n = (-1)^{n-1}/n$.
b) Même question avec $u_n = 1/n$ si $n \neq 0 \quad [3]$ et $u_n = -2/n$ sinon.

Exercice 66 [01055] [correction]
Justifier et calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$$

Exercice 67 [01057] [correction]
Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $a_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}$. Montrer que a_p existe puis exprimer a_p en fonction de $a_0, \dots, a_{p-1}$. En déduire que $a_p \in \mathbb{N}$.

Exercice 68 [01058] [correction]
Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln(1+1/n)$$

Exercice 69 [02354] [correction]
Existence et calcul de

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)} \quad \text{b) } \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

Exercice 70 Mines-Ponts MP [02801] [correction]
Soient α dans $\mathbb{R}^\star$, a et b dans $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. On pose

$$u_0 = \alpha \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{n-a}{n-b}u_n$$

Etudier la nature de la série de terme général u_n et calculer éventuellement sa somme.

Exercice 71 Mines-Ponts MP [02804] [correction]
Convergence puis calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$$

Exercice 72 Mines-Ponts MP [02805] [correction]
Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$$

Exercice 73 X MP [02964] [correction]
Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4}\right)$$

Exercice 74 [02426] [correction]
Calculer pour $x \in \left]-1,1\right[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$$

Exercice 75 X MP [01338] [correction]
Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$$

Exercice 76 Centrale MP [01565] [correction]
1. Soit $F : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

$$(n,k) \mapsto \frac{(k!)^2}{((n+k+1)!)^2}$$

1.a) Démontrer que pour tout entier naturel n, la série de terme général $F(n,k)$ est convergente. On posera dans la suite

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{+\infty} F(n,k)$$

1.b) Calculer σ_n, pour $n \in [\![0,10]\!]$ avec le logiciel de calcul formel.
2. Soit $G : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

$$(n,k) \mapsto (3n+2k+3)F(n,k)$$

a) Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. A l'aide du logiciel de calcul formel, comparer :

$$(n+1)^3F(n+1,k) - (4n+2)F(n,k) \text{ et } G(n,k+1) - G(n,k)$$

b) Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$(n+1)^3\sigma_{n+1} - (4n+2)\sigma_n = -\frac{3n+3}{((n+1)!)^2}$$

c) Déterminer une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\sigma_{n+1}}{P_{n+1}} - \frac{\sigma_n}{P_n} = -\frac{3\left((n+1)!\right)^2}{(n+1)^2(2n+2)!}$$

3. Conclure que la série de terme général

$$\frac{1}{n^2C_{2n}^n}$$

est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2C_{2n}^n} = \frac{\pi^2}{18}$$

Indication : on rappelle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Comparaison séries intégrales

Exercice 77 [01059] [correction]
Soit $\alpha < 1$. Déterminer un équivalent de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

Exercice 78 [01060] [correction]
Donner un équivalent simple à $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 1$ donné.

Exercice 79 [01061] [correction]
En exploitant une comparaison avec des intégrales établir :
a) $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n\sqrt{n}$ b) $\ln(n!) \sim n \ln n$ c) $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln n)$

Exercice 80 [01062] [correction]
Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$$

Exercice 81 [01063] [correction]
Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Exercice 82 [01064] [correction]
Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{(\ln 2)^2 + \cdots + (\ln n)^2}$$

Exercice 83 [01065] [correction]
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^\alpha}$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$)
Même question avec la série de terme général $(-1)^n u_n$.

Exercice 84 [01066] [correction]
Pour $\alpha > 1$, on pose $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$ et $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Etudier, selon α, la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{R_n}{S_n}$.

Exercice 85 [01067] [correction]
Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série divergente de réels strictement positifs. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
Montrer, à l'aide d'une comparaison intégrale que pour tout $\alpha > 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.

Exercice 86 [01068] [correction]
Pour $\alpha > 1$ on pose $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Montrer que $(\alpha - 1)\zeta(\alpha) \xrightarrow[\alpha\to 1+]{} 1$.

Exercice 87 [01069] [correction]
En exploitant une comparaison série-intégrale, déterminer $\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$.

Exercice 88 Centrale MP [02423] [correction]
On pose

$$u_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)^\alpha} \text{ et } v_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)^\alpha}$$

a) Déterminer la nature de la série de terme général u_n selon α.
b) Déterminer la nature de la série de terme général v_n selon α.

Exercice 89 Centrale MP [02428] [correction]
On pose
$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$
a) Nature des séries de termes généraux $f(n)$ puis $(-1)^n f(n)$.
b) Montrer la convergence de la série de terme général
$$f(n) - \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$
c) Calculer
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f(n)$$
Indice : On pourra s'intéresser à la quantité
$$2\sum_{k=1}^{n} f(2k) - \sum_{k=1}^{2n} f(k)$$

Exercice 90 Centrale MP [02431] [correction]
Soit $a > 0, b > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $A_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(a+bk)$, $B_n = \prod\limits_{k=1}^{n}(a+bk)^{1/n}$.
Trouver $\lim\limits_{n\infty} \frac{B_n}{A_n}$ en fonction de e.

Exercice 91 Centrale MP [02434] [correction]
Soit, pour $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{\cos\left(x^{1/3}\right)}{x^{2/3}}$$
a) Nature la série de terme général
$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - f(n)$$
b) Nature de la série de terme général $f(n)$.
(indice : on pourra montrer que $\sin\left(n^{1/3}\right)$ n'admet pas de limite quand $n \to +\infty$
c) Nature de la série de terme général
$$\frac{\sin\left(n^{1/3}\right)}{n^{2/3}}$$

Exercice 92 Mines-Ponts MP [02792] [correction]
Nature de la série de terme général
$$\frac{n^\alpha}{\sum\limits_{k=2}^{n} \ln^2 k}$$
où α est réel.

Exercice 93 Mines-Ponts MP [02795] [correction]
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^\star$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha}$. Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 94 Mines-Ponts MP [02810] [correction]
On pose $f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x}$ pour tout $x \geqslant 1$ et $u_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
a) Montrer que f' est intégrable sur $[1, +\infty[$.
b) Montrer que la série de terme général u_n est absolument convergente.
c) Montrer que la suite $(\cos(\ln n))$ diverge.
d) En déduire la nature de la série de terme général $f(n)$.

Exercice 95 X MP [03045] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, soit $f_n : x \in]n, +\infty[\to \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k}$. Soit $a > 0$. Montrer qu'il existe un unique réel, noté x_n tel que $f_n(x_n) = a$. Déterminer un équivalent de x_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 96 X MP [03086] [correction]
Etudier
$$\lim_{n \to +\infty} n \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} \mathrm{e}^{\frac{n}{k}}\right)$$

Exercice 97 [03104] [correction]
On note a_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de l'entier $n \geqslant 1$. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ y a-t-il convergence de la série
$$\sum \frac{x^{a_n}}{n^3} ?$$

Exercice 98 X MP [01337] [correction]
Quelle est la nature de la série de terme général

$$\frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}?$$

Application des séries à l'étude de suites

Exercice 99 [01070] [correction]
Calculer la limite de $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 100 [01071] [correction]
Soit $a > 0$.
a) Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{n!}$$

b) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 101 [01072] [correction]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

a) Déterminer un équivalent de

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n$$

En déduire que $u_n \to 0$.
b) En s'inspirant de ce qui précède, établir que $\sqrt{n}u_n \to C > 0$ (on ne cherchera pas expliciter C).

Exercice 102 [01073] [correction]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$.
a) Déterminer un équivalent de $\ln u_{n+1} - \ln u_n$. En déduire que $u_n \to 0$.
b) Montrer que $nu_n \to +\infty$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.
c) On pose $v_n = \frac{u_n}{n+1}$. En observant et en sommant les égalités $(2k+4)v_{k+1} = (2k+1)v_k$ calculer $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n et v_{n+1}. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n+1}$.

Exercice 103 [01074] [correction]
Montrer que $u_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$ a une limite non nulle.

Exercice 104 [01075] [correction]
Soit

$$P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$P_n \sim \frac{e^\lambda}{\sqrt{n}}$$

Exercice 105 [01076] [correction]
Soit (u_n) une suite complexe terme général d'une suite absolument convergente.
a) Montrer que $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + |u_k|)$ converge
b) Montrer que $\Pi_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + u_k)$ converge en exploitant le critère de Cauchy.

Exercice 106 [01077] [correction]
Etudier la limite de

$$u_n = \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u}\mathrm{d}u + \ln n$$

Exercice 107 [01078] [correction]
Soient $0 < a < b$ et (u_n) une suite strictement positive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.
a) Montrer que $u_n \to 0$. On pourra considérer $\ln u_n$.
b) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $v_n = n^\alpha u_n$. En étudiant (v_n), montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \frac{A}{n^{b-a}}$.
c) On suppose $b - a > 1$. En écrivant $(n+1)u_{n+1} - nu_n = au_n + (1-b)u_{n+1}$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 108 [01079] [correction]
Pour $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^{-\star}$, on considère (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = (1 + \alpha/n)\, u_n$$

a) Pour quel(s) $\beta \in \mathbb{R}$ y a-t-il convergence de la série de terme général

$$v_n = \ln \frac{(n+1)^\beta u_{n+1}}{n^\beta u_n} ?$$

b) En déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}^{+\star}$ pour lequel $u_n \sim An^\alpha$.

Exercice 109 [01080] [correction]
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

a) Pour quel(s) $\beta \in \mathbb{R}$ y a-t-il convergence de la série de terme général

$$v_n = \ln \frac{(n+1)^\beta u_{n+1}}{n^\beta u_n} ?$$

b) En déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}^{+\star}$ pour lequel

$$u_n \sim An^\alpha$$

Exercice 110 Centrale MP [02429] [correction]
On fixe $x \in \mathbb{R}^{+\star}$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

a) Etudier la suite de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$converge et préciser sa limite.
b) Etablir l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la série de terme général :

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

converge.
c) Etablir l'existence de $A \in \mathbb{R}^\star$ tel que $u_n \sim An^\alpha$.
d) Etudier la convergence de la série de terme général u_n.

Exercice 111 Mines-Ponts MP [02784] [correction]
Soit $u_0 \in \left]0, 2\pi\right[$ puis $u_{n+1} = \sin(u_n/2)$.
a) Montrer que (u_n) tend vers 0.
b) Montrer que $\lim(2^n u_n) = A$ pour un certain $A > 0$.
c) Trouver un équivalent simple de $(u_n - A2^{-n})$.

Exercice 112 Mines-Ponts MP [02809] [correction]
On pose

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}$$

a) Montrer que la suite (a_n) converge et trouver sa limite λ.
b) Trouver un équivalent simple de $a_n - \lambda$.

Exercice 113 X MP [03047] [correction]
Soit (u_n) une suite complexe telle que pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $u_{pn} - u_n \to 0$. Peut-on affirmer que la suite (u_n) converge ?

Exercice 114 Centrale MP [02418] [correction]
Former un développement asymptotique à trois termes de la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = (n + u_n^{n-1})^{1/n}$.

Nature de séries dépendant de paramètres

Exercice 115 [01081] [correction]
Déterminer en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature des séries de termes généraux :
a) $u_n = \mathrm{e}^{-n^\alpha}$b) $u_n = \frac{\ln n}{n^\alpha}$c) $u_n = \exp(-(\ln n)^\alpha)$

Exercice 116 [01082] [correction]
Etudier en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha \ln n}$$

Exercice 117 Centrale MP [01083] [correction]
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n \geqslant 1} \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$$

Calculer la somme lorsqu'il y a convergence.

Exercice 118 [01084] [correction]
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n \geqslant 1} \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$$

Calculer la somme lorsqu'il y a convergence.

Exercice 119 [01085] [correction]
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b, c pour que la suite de terme général $\frac{a}{\sqrt{1}} + \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{3}} + \frac{a}{\sqrt{4}} + \frac{b}{\sqrt{5}} + \frac{c}{\sqrt{6}} + \cdots$ converge.

Exercice 120 [01086] [correction]
Soit λ un réel. Etudier la nature des séries de terme général

$$u_n = \frac{\lambda^n}{1 + \lambda^{2n}}, v_n = \frac{\lambda^{2n}}{1 + \lambda^{2n}}, w_n = \frac{1}{1 + \lambda^{2n}}$$

Exercice 121 [01087] [correction]
Soit $\alpha > 0$. Préciser la nature de la série $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ avec $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 122 [01088] [correction]
Déterminer en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$$

Exercice 123 Centrale MP [02430] [correction]
On note $u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n \, dt$.
a) Déterminer la limite de u_n.
b) Trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n+2}.
c) Donner la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.
d) Discuter suivant $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série de terme général u_n / n^α.

Exercice 124 Mines-Ponts MP [02790] [correction]
Nature de la série de terme général $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right)$, où $a > 0$.

Exercice 125 Mines-Ponts MP [02791] [correction]
Nature de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$$

où $a \in \mathbb{R}^{+\star}$.

Exercice 126 Mines-Ponts MP [02799] [correction]
Soient $\alpha > 0$ et (u_n) une suite de réels strictement positifs vérifiant $u_n^{1/n} = 1 - \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. La série de terme général u_n converge-t-elle ?

Exercice 127 Mines-Ponts MP [02802] [correction]
Soient $(a, \alpha) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$u_n = a^{\sum_{k=1}^{n} 1/k^\alpha}$$

a) Pour quels couples (a, α) la suite (u_n) est-elle convergente ? Dans la suite, on suppose que tel est le cas, on note $\ell = \lim u_n$ et on pose, si $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$v_n = u_n - \ell$$

b) Nature des séries de termes généraux v_n et $(-1)^n v_n$.

Etude asymptotique de séries

Exercice 128 Centrale MP [01056] [correction]
a) Donner un développement asymptotique à deux termes de

$$u_n = \sum_{p=2}^{n} \frac{\ln p}{p}$$

On pourra introduire la fonction $f : t \mapsto (\ln t)/t$.
b) A l'aide de la constante d'Euler, calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

Exercice 129 [01089] [correction]
On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + \sqrt{k}}$$

Donner un équivalent simple de S_n.
Montrer que

$$S_n = \ln n + C + o(1)$$

Exercice 130 [01090] [correction]
On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}}$$

Montrer que (S_n) converge vers une constante C.
Etablir que

$$S_n = C - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$$

Exercice 131 [03070] [correction]
Former un développement asymptotique à deux termes de

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Exercice 132 [01091] [correction]
On pose

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{3k}$$

a) Montrer qu'il existe des constantes α et β telles que

$$\ln u_n = \alpha \ln n + \beta + o(1)$$

En déduire un équivalent de u_n.
b) Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

Exercice 133 [01092] [correction]
Déterminer un équivalent simple de
a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(nk+1)}$ b) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(n+k)}$

Exercice 134 [02376] [correction]
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

a) Pour quelles valeurs de α la série $\sum u_n$ converge ?
b) Pour quelles valeurs de α la série $\sum (-1)^n u_n$ converge ?

Exercice 135 X MP [03057] [correction]
On note $(z_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de terme général

$$z_n = 2n \exp\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)$$

Etudier

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{2n-1}{z_n-1}\frac{2n-2}{z_n-2}\cdots\frac{2n-n}{z_n-n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\prod_{k=1}^{n} \frac{2n-k}{z_n-k}\right|$$

Exercice 136 Centrale PSI [01325] [correction]
Soit $j \in \mathbb{N}$. On note Φ_j le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} \geqslant j$$

a) Justifier la définition de Φ_j.
b) Démontrer que $\Phi_j \xrightarrow[j \to +\infty]{} +\infty$.
c) Démontrer $\frac{\Phi_{j+1}}{\Phi_j} \xrightarrow[j \to +\infty]{} \mathrm{e}$.

Exercice 137 X MP [02950] [correction]
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^{+\star}$.
On pose

$$v_n = \frac{1}{nu_n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) \text{ et } w_n = \frac{1}{n^2 u_n}\left(\sum_{k=1}^{n} k u_k\right)$$

On suppose que (v_n) tend vers $a \in \mathbb{R}^{+\star}$.
Etudier la convergence de (w_n).

Exercice 138 Centrale MP [00528] [correction]
On définit pour $n \in \mathbb{N}^\star$ les nombres complexes

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{i}{k^2}\right) \text{ et } v_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + 2\frac{i}{k}\right)$$

a) On note, dans le plan complexe, A_n et B_n les points d'affixes respectives u_n et v_n.
Utiliser le logiciel de calcul formel pour visualiser les lignes polygonales
$A_1, A_2, \ldots, A_n$ et $B_1, B_2, \ldots, B$ pour diverses valeurs de n : par exemple 50,100,500... Un point du plan d'affixe $z = x + iy$ sera repéré par la liste $[x, y]$ de ses deux coordonnées.
b) Etudier la convergence de la suite (u_n).
S'il y a convergence, donner à l'aide du logiciel de calcul formel, une valeur approchée (par module et argument) de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
c) Etudier la convergence de la suite (v_n).
On pourra justifier l'existence d'une constante L telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{2}{k} = 2\ln n + L + o(1)$$

et étudier la nature (convergente ou divergente) de la suite complexe $(z_n)_{n\geqslant 1}$:

$$z_n = \exp(2i \ln n)$$

Exercice 139 [03179] [correction]
a) Sous réserve d'existence, déterminer pour $\alpha \geqslant 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha}$$

b) Sous réserve d'existence, déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$$

Exercice 140 [03226] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$n_p = \min\left\{n \in \mathbb{N}/H_n \geqslant p\right\}$$

Déterminer un équivalent de n_p quand $p \to +\infty$

Séries doubles

Exercice 141 [01093] [correction]
a) Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent à $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
b) Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ a-t-elle un sens ?
c) Montrer qu'alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$.

Exercice 142 [01094] [correction]
Justifier
$$\sum_{n=1,n\neq p}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}=\frac{3}{4p^2}$$
En déduire
$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1,n\neq p}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}\neq\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1,p\neq n}^{+\infty}\frac{1}{n^2-p^2}$$

Exercice 143 [01095] [correction]
Soit a un complexe de module strictement inférieur à 1.
En introduisant $u_{p,q}=a^{p(2q-1)}$ (pour $p,q\geqslant 1$) établir l'égalité :
$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{a^p}{1-a^{2p}}=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{a^{2p-1}}{1-a^{2p-1}}$$

Exercice 144 [01096] [correction]
On pose $a_{p,q}=\frac{2p+1}{p+q+2}-\frac{p}{p+q+1}-\frac{p+1}{p+q+3}$.
Calculer $\sum\limits_{q=0}^{+\infty}\sum\limits_{p=0}^{+\infty}a_{p,q}$ et $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\sum\limits_{q=0}^{+\infty}a_{p,q}$. Qu'en déduire ?

Exercice 145 Centrale MP [02424] [correction]
Convergence et calcul, pour $z\in\mathbb{C}$, de : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$.

Exercice 146 Mines-Ponts MP [02803] [correction]
Etudier $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m}(-1)^{i+j}t^{i+j+1}$.

Exercice 147 Mines-Ponts MP [02806] [correction]
Nature et calcul de la somme de la série de terme général $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$.

Série dont le terme général est défini par une suite récurrente

Exercice 148 [01097] [correction]
Soit (u_n) la suite définie par $u_0\in[0,\pi]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=1-\cos u_n$.
Montrer que $u_n\to 0$ et déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 149 [01098] [correction]
Soit (u_n) la suite définie par $u_0>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$.
Montrer que (u_n) converge vers un réel ℓ. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n-\ell$.

Exercice 150 [01099] [correction]
Soient $u_0\in\left]0,\pi/2\right[$ et $u_{n+1}=\sin u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
a) Montrer que $u_n\to 0^+$.
b) Exploiter $u_{n+1}-u_n$ pour montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n^3$ converge.
c) Exploiter $\ln u_{n+1}-\ln u_n$ pour montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n^2$ diverge.

Exercice 151 [03012] [correction]
La suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par $a_0\in\left]0,\pi/2\right[$ et
$$\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}=\sin(a_n)$$
Quelle est la nature de la série de terme général a_n ?

Exercice 152 [02440] [correction]
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par $a_0\in\mathbb{R}^{+\star}$ et pour $n\in\mathbb{N}$,
$$a_{n+1}=1-\mathrm{e}^{-a_n}$$
a) Etudier la convergence de la suite (a_n).
b) Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.
c) Déterminer la nature de la série de terme général a_n^2.
d) Déterminer la nature de la série de terme général a_n à l'aide de la série
$$\sum\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

Exercice 153 X MP [02961] [correction]
Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 > 0$ et pour tout $n > 0$,

$$u_n = \ln(1 + u_{n-1})$$

Etudier la suite (u_n) puis la série de terme général u_n.

Exercice 154 [01101] [correction]
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

a) Existence et éventuellement calcul de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 - u_n)$$

b) Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 155 X MP [02951] [correction]
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
a) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?
b) Même question lorsque u_n est définie par la récurrence $u_{n+1} = u_n - u_n^{1+\alpha}$ (avec $\alpha > 0$).

Exercice 156 [01100] [correction]
Soient (a_n) une suite positive et (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = u_n + a_n/u_n$$

Montrer que la suite (u_n) est convergente si, et seulement si, la série de terme général a_n est convergente.

Exercice 157 X MP [02960] [correction]
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in]0,1]$ et que, pour un certain $\beta > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^\beta = \sin u_n^\beta$.
Etudier la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 158 Centrale MP [02433] [correction]
Soit $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :

$$u_1 > 0 \text{ et } \forall n \geqslant 1, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$$

a) Condition nécessaire et suffisante sur α pour que (u_n) converge.
b) Equivalent de u_n dans le cas où (u_n) diverge.
c) Equivalent de $(u_n - \ell)$ dans le cas où (u_n) converge vers ℓ.

Familles sommables

Exercice 159 [02631] [correction]
Déterminer la nature de $\sum\limits_{m,n\geqslant 1} \frac{1}{(m+n)^\alpha}$ selon $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 160 [02636] [correction]
On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sommables.
a) Soit $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
b) Pour $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, on pose $(u \star v)_n = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$. Montrer que $u \star v \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et que $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} (u \star v)_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} u_n \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} v_n$.
c) Montrer que la loi $\star$ ainsi définie est commutative, associative et possède un neutre.
d) La structure $(\ell^1(\mathbb{Z}), \star)$ est-elle un groupe ?

Exercice 161 [02427] [correction]
Etablir que pour $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n$$

en notant $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) $u_n \sim \frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^{2n}} \sim \mathrm{e}^{-n}$ donc par comparaison de séries à termes positifs, la série est convergente.
b) $u_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ donc la série est absolument convergente.
c) $u_n \sim \frac{\mathrm{e}}{2n}$ donc par comparaison de séries à termes positifs, la série est divergente.

Exercice 2 : [énoncé]
C'est une série à termes positifs aux sommes partielles majorées car

$$\sum_{k=1}^n u_k \leqslant 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < +\infty$$

donc la série converge.

Exercice 3 : [énoncé]
On exploite les comparaisons

$$\max(u_n, v_n) \leqslant u_n + v_n, \sqrt{u_n v_n} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + v_n)$$

(obtenue par $2ab \leqslant (a^2 + b^2)$)
et

$$\frac{u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{u_n}{u_n + v_n} v_n \leqslant v_n$$

Par comparaison de série à termes positifs on peut alors conclure.

Exercice 4 : [énoncé]
Puisque $2ab \leqslant a^2 + b^2$ on a

$$\sqrt{u_n u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$$

or $\sum u_n$ et $\sum u_{n+1}$ convergent donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge.

Exercice 5 : [énoncé]
Si $\ell > 1$ alors à partir d'un certain rang $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$ et donc $u_n \geqslant 1$. Il y a divergence grossière.
Si $\ell < 1$ alors, en posant $\alpha = (1+\ell)/2$, on a $\ell < \alpha < 1$ et à partir d'un certain rang

$$\sqrt[n]{u_n} < \alpha$$

donc

$$u_n \leqslant \alpha^n$$

Or la série de terme général α^n est convergente car $\alpha \in [0,1[$ et donc $\sum u_n$ est absolument convergente.
Pour $u_n = 1/n$, $\sqrt[n]{u_n} = n^{-1/n} \to 1$ et pour $u_n = 1/n^2$, $\sqrt[n]{u_n} = n^{-2/n} \to 1$ alors que dans un cas les séries diverge et dans l'autre la série converge.

Exercice 6 : [énoncé]
$R_{2n} - R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k \geqslant n u_{2n} \geqslant 0$ donc $n u_{2n} \to 0$ d'où $u_{2n} = o\left(1/n\right)$
$0 \leqslant u_{2n+1} \leqslant u_{2n}$ et $u_{2n} = o\left(1/n\right)$ donc $u_{2n+1} = o(1/n)$. Ainsi $2n u_{2n} \to 0$ et $(2n+1)u_{2n+1} \to 0$ donc $n u_n \to 0$.

Exercice 7 : [énoncé]
Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha u_k$$

Par la décroissance de la suite (u_n), on a

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} k^\alpha u_k \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} n^\alpha u_{2n} = n^{\alpha+1} u_{2n} \geqslant 0$$

Puisque la suite (S_n) converge, $S_{2n} - S_n \to 0$ et on en déduit $(2n)^{\alpha+1} u_{2n} \to 0$.
Puisque

$$0 \leqslant (2n+1)^{\alpha+1} u_{2n+1} \leqslant \frac{(2n+1)^{\alpha+1}}{(2n)^{\alpha+1}} (2n)^{\alpha+1} u_{2n}$$

on a aussi $(2n+1)^{\alpha+1} u_{2n+1} \to 0$ et on peut donc conclure $n^{\alpha+1} u_n \to 0$.

Exercice 8 : [énoncé]
Puisque $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ et $u_n = \frac{v_n}{1-v_n}$ on a $u_n \to 0$ si, et seulement si, $v_n \to 0$.
Si $u_n \not\to 0$ alors $v_n \not\to 0$ et les deux séries divergent.
Si $u_n \to 0$ alors $v_n \sim u_n$ et donc les deux séries sont de même nature.
Dans les deux cas, les séries sont de même nature.

Exercice 9 : [énoncé]
a) Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \to 0$ et $v_n \sim u_n$ donc $\sum v_n$ converge par équivalence de série à termes positifs. Si $\sum v_n$ converge alors $v_n \to 0$ et aisément $u_n \to 0$ donc $v_n \sim u_n$ et on conclut comme ci-dessus.
b) Si $\sum u_n$ converge et est de somme S alors $v_n \sim u_n/S$ et on peut conclure.
Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum\limits_{n=2}^{N} \ln(1 - v_n) = \ln \frac{u_1}{u_1+\dots+u_n} \to -\infty$.
Si $v_n \to 0$, $\ln(1 - v_n) \sim -v_n$ donc $\sum v_n$ diverge car les séries sont de signe constant.
Si $v_n \not\to 0$, $\sum v_n$ diverge grossièrement.

Exercice 10 : [énoncé]
a) Via télescopage, pour tout $n \geqslant N : 0 < u_n \leqslant \frac{u_N}{v_N} v_n$ donc $u_n = O(v_n)$.
b) Soit $1 < \beta < \alpha$ et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

A partir d'un certain rang

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

donc $u_n = O(v_n)$ or $\sum v_n$ converge absolument donc $\sum u_n$ aussi.

Exercice 11 : [énoncé]
$\sum\limits_{k=0}^{n} |v_n| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ est absolument convergente.
Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $p(n) = \max\left\{\sigma^{-1}(k)/0 \leqslant k \leqslant n\right\}$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum\limits_{n\geqslant N+1} |u_n| \leqslant \varepsilon$.
Pour tout $M \geqslant p(N)$: $\left|\sum\limits_{n=0}^{M} v_n - \sum\limits_{n=0}^{N} u_n\right| \leqslant \sum\limits_{n\geqslant N+1} |u_n| \leqslant \varepsilon$ donc $\left|\sum\limits_{n=0}^{M} v_n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant 2\varepsilon$.
Par suite $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 12 : [énoncé]
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}$ est une série à termes positifs et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma(k)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{6}$$

avec $N = \max\{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$. Les sommes partielles étant majorées, la série est convergente. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sigma(k)}$$

avec $N = \max\left\{\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(N)\right\}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ ne peut converger car $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty$.

Exercice 13 : [énoncé]
La convergence de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ s'obtient entre autre par d'Alembert.
$\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{n!}\frac{1}{n+1}\frac{1}{1-1/n+1} = \frac{1}{n.n!}$.
Rq : La récurrence ne marche pas.

Exercice 14 : [énoncé]
a) $u_n = \exp(-n^2 \ln(1 + 1/n)) = \exp(-n + o(n))$donc $n^2 u_n \to 0$ et la série est absolument convergente.
b) $u_n \geqslant 1/n$ donc par comparaison de séries à termes positifs, la série est divergente.
c) $n^2 u_n = \frac{n^2}{(\ln n)^{\ln n}} = \mathrm{e}^{2\ln n - \ln n \ln\ln n} \to 0$ donc la série est absolument convergente

Exercice 15 : [énoncé]
a) $u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\dots+x^n} = \int_0^1 \frac{1-x}{1-x^{n+1}}\mathrm{d}x$, $\frac{1-x}{1-x^{n+1}} \to 1 - x$ et $\left|\frac{1-x}{1-x^{n+1}}\right| \leqslant \frac{1-x}{1-x} = 1$ donc $u_n \to \int_0^1 (1 - x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. La série diverge grossièrement.

b) $v_n = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x+\cdots+x^n} = \int_0^1 \frac{1-x}{1-x^{n+1}}x^n\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n}{1-x^{n+1}}(1-x)\mathrm{d}x$ avec par intégration par parties

$\int_0^1 \frac{x^n}{1-x^{n+1}}(1-x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{n+1}\ln(1-x^{n+1})(1-x)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \ln(1-x^{n+1})\mathrm{d}x$

avec $-\int_0^1 \ln(1-x^{n+1})\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}x^{(n+1)k}\mathrm{d}x$. Or

$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 \left|\frac{1}{k}x^{(n+1)k}\right|\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k((n+1)k+1)} < +\infty$ donc

$-\int_0^1 \ln(1-x^{n+1})\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\int_0^1 x^{(n+1)k}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k((n+1)k+1)} \leqslant \frac{1}{(n+1)}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ puis

$v_n = O\left(1/n^2\right)$ et donc la série de terme général v_n converge.

Exercice 16 : [énoncé]

On a

$$\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

et

$$n^{3/2} - \left\lfloor n^{3/2}\right\rfloor + n = n + O(1) \sim n$$

donc

$$\frac{\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2} - \left\lfloor n^{3/2}\right\rfloor + n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ce qui permet de conclure à une absolue convergence.

Exercice 17 : [énoncé]

On remarque

$$v_n \geqslant u_{2^n} + u_{2^n+1} + \cdots + u_{2^{n+1}-1}$$

de sorte que

$$\sum_{k=0}^{n} v_k \geqslant \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} u_k$$

Ainsi, si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ aussi par comparaison de séries à termes positifs.

Aussi

$$u_{2^n} + \cdots + u_{2^{n+1}-1} \geqslant \frac{1}{2}v_{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} u_k \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} v_k$$

Ainsi, si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ aussi par comparaison de séries à termes positifs.

Exercice 18 : [énoncé]

Supposons que $\sum v_n$ converge. Pour $n^2 \leqslant k < (n+1)^2$, $0 \leqslant u_k \leqslant u_{n^2} \leqslant \frac{v_n}{n^2}$ donc

$0 \leqslant \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} u_k \leqslant v_n \frac{(n+1)^2-n^2}{n^2}$ ce qui permet d'affirmer que les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum u_n$ sont majorées et donc $\sum u_n$ converge.

Inversement, pour $u_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ on a $v_n = \frac{1}{n}$ de sorte que $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge.

Exercice 19 : [énoncé]

Pour $t \in [0, 1/n]$, on peut affirmer $t^n \in [0, 1/n]$ donc

$$\left|\int_0^{1/n} f(t^n)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f(0)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sup_{t\in[0,1/n]}|f(t)-f(0)|$$

Par continuité de f en 0, on peut affirmer,

$$\sup_{t\in[0,1/n]}|f(t)-f(0)| \to 0$$

et donc

$$\int_0^{1/n} f(t^n)\,\mathrm{d}t \sim \frac{1}{n}f(0)$$

Ainsi

$$u_n \sim \frac{f(0)}{n^{\alpha+1}}$$

et $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

Exercice 20 : [énoncé]

a) Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 donc la suite (u_n) est de signe constant à partir d'un certain rang ; quitte à passer à l'opposé on peut supposer $u_n > 0$ pour n assez grand.

Posons

$$w_n = \ln((n+1)^\lambda u_{n+1}) - \ln(n^\lambda u_n)$$

On a

$$w_n = \lambda\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{\lambda}{n}+v_n\right)$$

est le terme général d'une série absolument convergente. Par conséquent la suite $(\ln(n^\lambda u_n))$ converge et donc $(n^\lambda u_n)$ aussi.

b) Posons $u_n = \frac{n^n}{n!\mathrm{e}^n}$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

En reprenant l'étude qui précède on peut affirmer que $n^{1/2}u_n \to \ell > 0$ donc $\sum u_n$ diverge.
Ce résultat peut être confirmé par la formule de Stirling.

Exercice 21 : [énoncé]
Posons $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k - nu_n$. On a $v_{n+1} - v_n = n(u_n - u_{n+1}) \geqslant 0$.
La suite (v_n) est croissante et majorée donc convergente. Posons ℓ sa limite.
On a $u_n - u_{n+1} = \frac{1}{n}(v_{n+1} - v_n)$ donc
$\sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k}(v_{k+1} - v_k) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k)$ ce qui donne
$u_n \leqslant \frac{1}{n}(\ell - v_n)$.
On en déduit $0 \leqslant nu_n \leqslant \ell - v_n$ et donc $nu_n \to 0$ puis $\sum_{k=1}^{n} u_k \to \ell$.
Finalement $\sum u_n$ converge.

Exercice 22 : [énoncé]
Si $\sum u_n$ converge alors en notant S sa somme (strictement positive), $v_n \sim u_n/S$ et donc $\sum v_n$ converge.
Supposons désormais que $\sum u_n$ diverge et montrons qu'il en est de même de $\sum v_n$.
Par la décroissante de $t \mapsto 1/t$, on a $\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} \leqslant \frac{u_n}{S_{n-1}}$.
En sommant ces inégalités $\int_{S_1}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{u_k}{S_{k-1}}$.
Or $\int_{S_1}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln S_n - \ln S_1 \to +\infty$ car $S_n \to +\infty$ donc par comparaison$\sum \frac{u_n}{S_{n-1}}$ diverge.
Puisque $\frac{u_n}{S_{n-1}} = \frac{u_n}{S_n - u_n} = v_n \frac{1}{1 - v_n}$
Si $v_n \not\to 0$ alors $\sum v_n$ diverge.
Si $v_n \to 0$ alors $v_n \sim \frac{u_n}{S_{n-1}}$ et à nouveau $\sum v_n$ diverge.
Finalement $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Exercice 23 : [énoncé]
$u_n = R_{n-1} - R_n$ et la décroissance de $t \to 1/t$, $\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{R_{n-1} - R_n}{R_n} = \frac{u_n}{R_n}$.
$\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln R_{n-1} - \ln R_n$ donc la série à termes positifs $\sum \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge car $\ln R_n \to -\infty$ puisque $R_n \to 0$.
Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n/R_n$ diverge.
$\frac{u_n}{R_n} = \frac{u_n}{R_{n-1} - u_n} = \frac{u_n}{R_{n-1}} \frac{1}{1 - u_n/R_{n-1}}$.
Si $u_n/R_{n-1} \not\to 0$ alors $\sum u_n/R_{n-1}$ diverge.
Si $u_n/R_{n-1} \to 0$ alors $\frac{u_n}{R_{n-1}} \sim \frac{u_n}{R_n}$ et donc $\sum u_n/R_{n-1}$ diverge encore.
Dans tous les cas, $\sum u_n/R_{n-1}$ diverge.

Exercice 24 : [énoncé]
Posons

$$v_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$$

Si (u_n) converge alors, en posant ℓ sa limite,

$$v_n \sim \frac{1}{\ell}(u_{n+1} - u_n)$$

et puisque la série à termes positifs $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge, il en est de même de $\sum v_n$.
Si (u_n) diverge alors $u_n \to +\infty$.
Par la décroissance de $t \to 1/t$,

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} \geqslant \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$$

Puisque $\ln(u_n) \to +\infty$, la série à terme positif $\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ diverge et donc $\sum v_n$ aussi.
Finalement, la nature de la série $\sum v_n$ est celle de la suite (u_n).

Exercice 25 : [énoncé]
Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2}$$

On a

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geqslant \frac{1}{4n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k)$$

Or les entiers $\sigma(n+1), \ldots, \sigma(2n)$ sont, à l'ordre près, au moins égaux à $1, \ldots, n$ et donc

$$S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{8n} \geqslant \frac{1}{8}$$

On en déduit que (S_n) diverge.

Exercice 26 : [énoncé]
Etude de $\sum \frac{1}{nf(n)}$.
Notons que par permutation des termes d'une série absolument convergente, la série $\sum \frac{1}{f(n)^2}$ converge.
Puisque $0 \leqslant \frac{1}{nf(n)} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{f(n)^2}\right)$, on peut affirmer, par comparaison de séries à termes positifs, que la série étudiée converge.
Etude de $\sum \frac{f(n)}{n^2}$.
Posons $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k^2}$. On observe
$u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{f(k)}{k^2} \geqslant \frac{1}{4n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} f(k) \geqslant \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{8n} \to \frac{1}{8}$ d'où l'on conclut que la série diverge.
Etude de $\sum \frac{f(n)}{n \ln n}$.
Pour n assez grand, $n^2 \geqslant n \ln n$ donc $\frac{f(n)}{n^2} \leqslant \frac{f(n)}{n \ln n}$ et donc la série étudiée diverge.
Etude de $\sum_{n \in \mathbb{N}^\star} \frac{f(n)}{n^3}$.
Pour $f : n \mapsto n$, la série est convergente.
Pour $f : 2p \mapsto p^2$ et $2p+1 \mapsto$le $p+1$ème entier qui n'est pas un carré, la série contient les termes $1/8p$ avec $p \in \mathbb{N}^\star$ et est donc divergente.

Exercice 27 : [énoncé]
a) $\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} k u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - n u_{n+1}(*)$.
Montrons que la convergence de $\sum u_n$ entraîne que $nu_n \to 0$.
Posons S_n les sommes partielles de $\sum u_n$.
Par la décroissance de u_n, on a $0 \leqslant n u_{2n} \leqslant S_{2n} - S_n$.
Par suite $n u_{2n} \to 0$ et aussi $2n u_{2n} \to 0$.
De façon semblable, on obtient $n u_{2n+1} \to 0$ puis $(2n+1)u_{2n+1} \to 0$.
Ainsi $nu_n \to 0$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

b) Supposons que la série de terme général v_n converge.
Si la série de terme général u_n converge alors $u_n \to 0$.
Inversement, supposons que $u_n \to 0$. On peut écrire

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{k}$$

On a alors

$$0 \leqslant n u_n \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n}{k} v_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

Puisque la série des v_n converge,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \to 0 \text{ puis } n u_n \to 0$$

La relation (*) entraîne alors la convergence de $\sum u_n$.
c) $u_n = 1$ convient, où si l'on veut une suite non constante, $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

Exercice 28 : [énoncé]
La série de terme général u_n est convergente.
En effet, puisque $\sum a_n$ converge, $a_n \to 0$ et donc il existe un rang$N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, a_n \leqslant 1$$

En posant $M = a_0 a_1 \ldots a_{N-1}$, on peut écrire pour tout $n \geqslant N$

$$0 \leqslant u_n \leqslant M a_N \ldots a_{n-1} a_n \leqslant M a_n$$

Par comparaison de série à termes positifs, on obtient la convergence voulue.

Exercice 29 : [énoncé]
Supposons la série $\sum v_n$ convergente. On a $v_n \to 0^+$ donc $1 + n^2 u_n \to +\infty$ et on en déduit

$$v_n \sim \frac{1}{n^2 u_n}$$

puis

$$\sqrt{u_n v_n} \sim \frac{1}{n}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, il y a divergence de la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$.
Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \sqrt{u_k v_k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_n \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_n \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

On en déduit la divergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 30 : [énoncé]
On a
$$nu_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \exp\left[\frac{1}{n}\ln n\right] \to 1$$
donc pour n assez grand
$$u_n \geqslant \frac{1}{2n}$$
et par comparaison de série à termes positifs on peut affirmer que $\sum u_n$ diverge.

Exercice 31 : [énoncé]
a) Pour x assez grand, on a
$$\frac{xf'(x)}{f(x)} \geqslant -1$$
donc
$$\frac{f'(x)}{f(x)} \geqslant -\frac{1}{x}$$
En intégrant, il existe une constante β tel que
$$\ln f(x) \geqslant -\ln x + \beta$$
et alors
$$f(x) \geqslant \frac{C}{x} \text{ avec } C = \mathrm{e}^{\beta} > 0$$
Par comparaison de séries à termes positifs, on peut affirmer la divergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f(n)$
b) Soit un réel $\alpha > 1$ tel que $\ell < -\alpha$. Pour x assez grand, on a
$$\frac{xf'(x)}{f(x)} \leqslant -\alpha$$
et donc
$$\frac{f'(x)}{f(x)} \leqslant -\frac{\alpha}{x}$$
En intégrant, il existe une constante β tel que
$$\ln f(x) \leqslant -\alpha \ln x + \beta$$
et alors
$$f(x) \leqslant \frac{C}{x^{\alpha}} \text{ avec } C = \mathrm{e}^{\beta} > 0$$
Par comparaison de séries à termes positifs, on peut affirmer la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f(n)$

Exercice 32 : [énoncé]
Par permutation de sommes
$$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=k}^{N} \frac{ku_k}{n(n+1)}$$
donc
$$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{k=1}^{N} ku_k \sum_{n=k}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{N+1-k}{N+1} u_k$$
et donc
$$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{k=1}^{N} u_k - Nv_N$$
Supposons que la série $\sum u_n$ converge
Puisque $\sum v_n$ est une série à termes positifs et que ses sommes partielles sont majorée car
$$\sum_{n=1}^{N} v_n \leqslant \sum_{k=1}^{N} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$
la série $\sum v_n$ converge.
Supposons que la série $\sum v_n$ converge.
On a
$$nv_n = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} v_k$$
donc par croissance des sommes partielles d'une série à termes positifs, la suite (nv_n) admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Si cette limite est non nulle, la série $\sum v_n$ diverge ce qui est contraire à l'hypothèse initiale. On en déduit
$$nv_n \to 0$$
donc
$$\sum_{k=1}^{N} u_k = \sum_{n=1}^{N} v_n + Nu_n \to \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$$
Ainsi $\sum u_n$ converge et
$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$$

Exercice 33 : [énoncé]
Soient $\sum u_n$ une série semi-convergente et $\sum v_n$ une série absolument convergente. La série $\sum u_n + v_n$ est convergente et si celle-ci était absolument convergente alors $\sum u_n$ le serait aussi car $|u_n| \leqslant |u_n + v_n| + |v_n|$. La série $\sum u_n + v_n$ n'est donc que semi-convergente.

Exercice 34 : [énoncé]
a) $u_n \sim 1/n^2$ donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
b) On applique le critère spécial et on conclut que $\sum u_n$ converge.
c) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et on peut conclure que $\sum u_n$ converge.
d) $u_n = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{(-1)^{n+1}.3}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 35 : [énoncé]
Il s'agit d'une série alternée.

$$\ln \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln k$$

et ainsi $\ln \sqrt[n]{n!}$ est la moyenne arithmétique de $\ln 1, \ln 2, \ldots, \ln n$ et donc

$$\ln \sqrt[n]{n!} \leqslant \ln \sqrt[n+1]{(n+1)!}$$

puis

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}$$

De plus par la croissance de la fonction $x \mapsto \ln x$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln k \geqslant \frac{1}{n}\int_1^n \ln x \mathrm{d}x = \ln n - 1 \to +\infty$$

et donc

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$$

Finalement on peut appliquer le critère spécial des séries alternées et conclure.

Exercice 36 : [énoncé]
A partir du rang $n = 2$, on peut applique le critère spécial des séries alternées. Le reste étant majorée par la valeur absolue du premier terme
$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!} = 1 - 4 + r$ avec $|r| \leqslant \frac{64}{24}$ donc $x < 0$.

Exercice 37 : [énoncé]
Par découpage

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$

donc par translations

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n\pi + t)}{n\pi + t} \mathrm{d}t$$

puis la relation proposée.
I se perçoit alors comme somme d'une série vérifiant le critère spécial des séries alternées, sa somme est donc du signe de son premier terme à savoir positif.

Exercice 38 : [énoncé]
a) On applique le critère spécial.
b) Par décalage d'indice sur la deuxième somme

$$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$$

c) Puisque

$$R_n - R_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

on a

$$2R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$$

Or par le critère spécial

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$R_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$

d) Comme $R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ la série $\sum_{n\geqslant 1} R_n$ est convergente.

Exercice 39 : [énoncé]
$\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right) = (-1)^n \sin\frac{\pi}{n} = \frac{(-1)^n \pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ donc la série est semi-convergente.

Exercice 40 : [énoncé]
$\frac{j^{3n}}{\sqrt{3n}} + \frac{j^{3n+1}}{\sqrt{3n+1}} + \frac{j^{3n+2}}{\sqrt{3n+2}} = \frac{j^{3n}(1+j+j^2)}{\sqrt{3n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc la série des $\frac{j^{3n}}{\sqrt{3n}} + \frac{j^{3n+1}}{\sqrt{3n+1}} + \frac{j^{3n+2}}{\sqrt{3n+2}}$ est absolument convergente et puisque $\frac{j^{3n+1}}{\sqrt{3n+1}}, \frac{j^{3n+2}}{\sqrt{3n+2}} \to 0$, la série des $\frac{j^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

Exercice 41 : [énoncé]
a) $(a_n - a_{n+1})S_n = O(a_n - a_{n+1})$ et la série $\sum a_n - a_{n+1}$ est absolument convergente.
b) En séparant la somme en deux et en décalant les indices
$\sum_{k=0}^{n}(a_k - a_{k+1})S_k = \sum_{k=0}^{n} a_k S_k - \sum_{k=1}^{n+1} a_k S_{k-1}$ puis en regroupant
$\sum_{k=0}^{n}(a_k - a_{k+1})S_k = a_0 S_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k(S_k - S_{k-1}) - a_{n+1}S_n$avec $a_{n+1}S_n \to 0$. Par suite $\sum a_n(S_n - S_{n-1})$ est convergente.
c) On applique le résultat précédent à $a_n = 1/n$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$. (S_n) est bien bornée car $S_n = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx}\right) = \cos(nx)\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$.

Exercice 42 : [énoncé]
Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$$

On a

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{z_n}{n} = \sum_{n=1}^{N}\frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N}\frac{S_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1}\frac{S_n}{n+1}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{z_n}{n} = \sum_{n=1}^{N}\frac{S_n}{n(n+1)} + \frac{S_N}{N+1}$$

Or $\frac{S_N}{N+1} \to 0$ car (S_N) converge et $\frac{S_n}{n(n+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente. On peut conclure que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{z_n}{n}$ converge.

Exercice 43 : [énoncé]
a) On a

$$\Sigma_n = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{ik}\right) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{i}\frac{1-\mathrm{e}^{in}}{1-\mathrm{e}^{i}}\right)$$

donc

$$|\Sigma_n| \leqslant \left|\mathrm{e}^{i}\frac{1-\mathrm{e}^{in}}{1-\mathrm{e}^{i}}\right| \leqslant \frac{2}{|1-\mathrm{e}^{i}|}$$

et la suite $(\Sigma_n)_{n\geqslant 1}$ est effectivement bornée.
b) On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\Sigma_k - \Sigma_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\Sigma_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Sigma_k}{k+1}$$

donc

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\Sigma_k}{k(k+1)} + \frac{\Sigma_n}{n+1}$$

Or $\frac{\Sigma_n}{n+1} \to 0$ car (Σ_n) est bornée et $\frac{\Sigma_k}{k(k+1)} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente. On peut donc conclure que (S_n) converge.

Exercice 44 : [énoncé]
a) par application du critère de Leibniz.
b) $w_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k v_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$ or $\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \geqslant \frac{1}{n}$ donc $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \geqslant \frac{n-1}{n}$ et par suite $w_n \not\to 0$ et $\sum w_n$ diverge grossièrement.

Exercice 45 : [énoncé]
Par comparaison avec une intégrale :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$$

On a alors

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}}\frac{1}{1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}}} = \frac{(-1)^n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}} + \frac{1}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2} + o\left(\frac{1}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}\right)$$

La série de terme général

$$\frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}}$$

converge en vertu du critère spécial.
On a

$$\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}+o\left(\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}\right)\sim\frac{1}{4n}$$

donc par comparaison de série à termes positifs il y a divergence de la série de terme général

$$\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}+o\left(\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}\right)$$

Par sommation d'une série convergente et d'une série divergente la série de terme général diverge.

Exercice 46 : [énoncé]
a) $u_n=\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc $\sum u_n$ converge.
b)

$$u_n=\frac{(-1)^n}{\ln n+\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{(-1)^n}{\ln n}-\frac{1}{n\ln^2 n}+o\left(\frac{1}{n\ln^2 n}\right)$$

Or la série de la série de terme général $\frac{1}{n\ln^2 n}$ est absolument convergente (utiliser une comparaison avec une intégrale) donc $\sum u_n$ est convergente.
c)

$$u_n=\frac{(-1)^n}{\ln n}+\frac{1}{(\ln n)^2}+o\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right)$$

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{\ln n}$ est convergente alors que la série de terme général $\frac{1}{(\ln n)^2}+o\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right)$ est divergente par équivalence de séries à termes positifs. On conclut que $\sum u_n$ est divergente.

Exercice 47 : [énoncé]
II) a)$S_n=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{ik\theta}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}-1}\right)$ donc $|S_n|\leqslant\left|\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}-1}\right|\leqslant\frac{2}{|\mathrm{e}^{i\theta}-1|}$.
b) $\sum_{n=1}^{N}u_n=\sum_{n=1}^{N}\frac{S_n}{n}-\sum_{n=0}^{N-1}\frac{S_n}{n+1}=\sum_{n=1}^{N}\frac{S_n}{n(n+1)}-S_0+\frac{S_N}{N+1}$.
Or $\frac{S_N}{N+1}\to 0$ et $\frac{S_n}{n(n+1)}=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n converge.
c) $|\cos x|\geqslant\cos^2 x=\frac{\cos 2x+1}{2}$ donc $|u_n|\geqslant\frac{\cos(2n\theta)}{2n}+\frac{1}{2n}$.
Si $\theta=0\quad[\pi]$ alors $|u_n|\geqslant\frac{1}{n}$ et donc $\sum|u_n|$ diverge.
Si $\theta\neq 0\quad[\pi]$ alors par ce qui précède la série $\sum\frac{\cos(2n\theta)}{n}$ converge et puisque la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, par opérations, la série de terme général $|u_n|$ diverge.

Exercice 48 : [énoncé]
a) On a

$$\int_0^x\sin(t^2)\,\mathrm{d}t=\int_0^\pi\sin(t^2)\,\mathrm{d}t+\int_\pi^x\sin(t^2)\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_{\sqrt{\pi}}^x\sin(t^2)\,\mathrm{d}t=\int_{\sqrt{\pi}}^x\frac{2t}{2t}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{\cos(t^2)}{2t}\right]_{\sqrt{\pi}}^x-\int_{\sqrt{\pi}}^x\frac{\cos(t^2)}{2t^2}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_0^x\sin(t^2)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to+\infty]{}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}-\frac{1}{2}\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty}\frac{\cos(t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

où l'on vérifie que la dernière intégrale converge.
b) Par découpage

$$A=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t$$

et par changement de variable

$$\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u=(-1)^n\int_0^\pi\frac{\sin v}{2\sqrt{v+n\pi}}\,\mathrm{d}v=(-1)^n u_n$$

avec

$$u_n=\int_0^\pi\frac{\sin v}{2\sqrt{v+n\pi}}\,\mathrm{d}v$$

Aisément $u_n\geqslant 0$, $u_{n+1}\leqslant u_n$ et $u_n\to 0$ donc on peut appliquer le critère spécial qui assure que A est du signe de $(-1)^0u_0$ c'est-à-dire positif.

c) La question a) est identique. Pour b) les choses se compliquent car on découpe l'intégrale en $\pi/2$, $3\pi/2$,... pour obtenir :

$$B = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos v}{2\sqrt{v}}\,\mathrm{d}v + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos v}{2\sqrt{v+n\pi}}\,\mathrm{d}v$$

Le critère spécial des séries alternées s'applique à la série sous-jacente et B est du signe de

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos v}{2\sqrt{v}}\,\mathrm{d}v - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos v}{2\sqrt{v+\pi}}\,\mathrm{d}v + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos v}{2\sqrt{v+2\pi}}\,\mathrm{d}v$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{v+\pi}} - \frac{1}{\sqrt{v+2\pi}} \leqslant \frac{\pi}{2\,(v+\pi)^{3/2}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{v+\pi}}$$

donc

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos v}{2\sqrt{v+\pi}}\,\mathrm{d}v - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos v}{2\sqrt{v+2\pi}}\,\mathrm{d}v \leqslant \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos v}{4\sqrt{v+\pi}}\,\mathrm{d}v$$
$$\leqslant \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos v}{4\sqrt{\pi/2}}\,\mathrm{d}v = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos v}{2\sqrt{\pi/2}}\,\mathrm{d}v \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{\cos v}{2\sqrt{v}}\,\mathrm{d}v$$

et on peut conclure.
d) on utilise l'instruction evalf.
Culture : les intégrales A et B sont en fait égales.

Exercice 49 : [énoncé]
$\sqrt{n^2+1} = n + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $u_n = \frac{(-1)^n\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est terme général d'une série convergente.

Exercice 50 : [énoncé]
En développant et après simplification, $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n \in 2\mathbb{Z}$ donc $u_n = -\sin\left((2-\sqrt{3})^n\pi\right)$. Puisque $\left|2-\sqrt{3}\right| < 1$, $u_n \sim -(2-\sqrt{3})^n\pi$ est terme général d'une série absolument convergente.

Exercice 51 : [énoncé]
Pour $\frac{k(k-1)}{2} < n \leqslant \frac{k(k+1)}{2}$, on pose $u_n = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
Ceci définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de sorte que ses premiers termes sont :
$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \ldots$
Les termes sommées tendent vers 0 et les sommes partielles oscillent entre 0 et 1.

Exercice 52 : [énoncé]
a) Pour $u_n = (-1)^n$, la série de terme général u_n est divergente et puisque ces sommes partielles valent 0 ou 1, elle enveloppe tout réel de l'intervalle $[0,1]$.
Pour $u_n = (-1)^n/(n+1)$, la série de terme général u_n satisfait le critère spécial des séries alternées et donc elle converge et la valeur absolue de son reste est inférieure à son premier terme. Cette série enveloppe donc sa somme, à savoir $\ln 2$.
Pour $u_n = 1/2^n$, la série de terme général u_n converge. Puisque $u_n \to 0$, le seul réel qu'elle peut envelopper est sa somme, or

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

n'est pas inférieur à u_{n+1}. Cette série convergente n'enveloppe aucun réel.
b) Posons pour la suite de notre étude

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

On a

$$\theta_{n+2}u_{n+2} = A - S_{n+1} = A - S_n - u_{n+1} = (\theta_{n+1} - 1)u_{n+1}$$

Puisque $\theta_{n+2} > 0$ et $\theta_{n+1} - 1 < 0$, on peut affirmer que u_{n+2} et u_{n+1} sont de signes opposés.
Puisque $A - S_n = \theta_{n+1}u_{n+1}$ est du signe de u_{n+1}, les réels $A - S_n$ et $A - S_{n+1}$ sont de signes opposés et donc A est encadré par S_n et S_{n+1}.
c) Puisque $A - S_n$ est du signe de u_{n+1}, on peut écrire $A - S_n = \theta_{n+1}u_{n+1}$ avec $\theta_{n+1} \in \mathbb{R}^+$.
Puisque $A - S_{n+1} = (\theta_{n+1} - 1)u_{n+1}$ est du signe de u_{n+2} et puisque u_{n+1} et u_{n+2} sont de signes opposés, on a $\theta_{n+1} - 1 \leqslant 0$ et donc $\theta_{n+1} \in [0,1]$.
On ne peut rien dire de plus, sauf à savoir que $A - S_n$ est non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En effet pour $u_n = (-1)^n$ et $A = 1$, la série de terme général u_n est alternée et
pour n pair : $A - S_n = 1 - 1 = 0$ est du signe de u_{n+1}.
pour n impair : $A - S_n = 1 - 0 = 1$ est du signe de u_{n+1}.
Si en revanche, on suppose $A - S_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, obtenir $\theta_{n+1} \in \left]0,1\right[$ est désormais immédiat.
d) Par l'absurde, supposons $u_{n+1}, u_{n+2} > 0$.
On a $A - S_n \leqslant u_{n+1}$ donc $A - S_{n+1} \leqslant 0$ puis $A - S_{n+2} \leqslant -u_{n+2}$ et donc $|A - S_{n+2}| \geqslant |u_{n+2}|$. Or $|A - S_{n+2}| \leqslant |u_{n+3}|$ et $|u_{n+3}| < |u_{n+2}|$, c'est absurde et donc u_{n+1} et u_{n+2} ne sont pas tous deux strictement positifs. Un raisonnement symétrique établit qu'ils ne sont pas non plus tous deux strictement négatifs et donc la série de terme général u_n est alternée à partir du rang 1 (on ne peut rien affirmer pour le rang 0).

Puisque $A-S_{n+1}=A-S_n-u_{n+1}$, on a
$-|u_{n+1}|-u_{n+1}\leqslant A-S_{n+1}\leqslant |u_{n+1}|-u_{n+1}$.
Si $u_{n+1}>0$ alors $A-S_{n+1}\leqslant 0$ et donc du signe de u_{n+2}.
Si $u_{n+1}<0$ alors $A-S_{n+1}\geqslant 0$ et donc à nouveau du signe de u_{n+2}.
Enfin $A-S_{n+1}$ n'est pas nul, car sinon
$A-S_{n+3}=A-S_{n+1}-(u_{n+2}+u_{n+3})=-(u_{n+2}+u_{n+3})$ est de signe strict opposé à u_{n+2} et n'est donc pas du signe de u_{n+4}.
On peut alors exploiter le résultat du c) et affirmer que la série de terme général u_n encadre strictement A.

Exercice 53 : [énoncé]
Posons

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(\ln k)}{k}$$

Pour les entiers k appartenant à l'intervalle

$$\left[\mathrm{e}^{-\pi/4+2n\pi},\mathrm{e}^{\pi/4+2n\pi}\right]$$

on a

$$\frac{\cos(\ln k)}{k}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\mathrm{e}^{\pi/4+2n\pi}}$$

Posons

$$a_n=E\left(\mathrm{e}^{-\pi/4+2n\pi}\right)\text{ et }b_n=E\left(\mathrm{e}^{\pi/4+2n\pi}\right)$$

On a

$$S_{a_n}-S_{b_n}=\sum_{k=a_n+1}^{b_n}\frac{\cos(\ln k)}{k}\geqslant\frac{b_n-a_n}{\sqrt{2}}\frac{1}{\mathrm{e}^{\pi/4+2n\pi}}$$

Or, par encadrement,

$$\frac{b_n-a_n}{\mathrm{e}^{\pi/4+2n\pi}}\to(1-\mathrm{e}^{-\pi/2})$$

donc $(S_{a_n}-S_{b_n})$ ne tend pas vers 0. Or $a_n,b_n\to+\infty$ donc la série étudiée ne peut converger.

Exercice 54 : [énoncé]
Puisque $u_n\to 0$, il revient au même d'étudier la nature de la série de terme général

$$v_n=u_{2n}+u_{2n+1}$$

Or

$$v_n=\frac{\sin(\ln 2n)}{2n(2n+1)}+\frac{\sin(\ln(2n+1))-\sin(\ln 2n)}{2n+1}$$

D'une part

$$\frac{\sin(\ln 2n)}{2n(2n+1)}=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et d'autre part en vertu du théorème des accroissements finis, il existe c compris entre $\ln 2n$ et $\ln(2n+1)$ tel que

$$\frac{\sin(\ln(2n+1))-\sin(\ln 2n)}{2n+1}=\frac{\cos(c)\left(\ln(2n+1)-\ln 2n\right)}{2n+1}=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit que $v_n=O\left(1/n^2\right)$ et donc la série de terme général v_n est absolument convergente donc convergente.

Exercice 55 : [énoncé]
a) Il est immédiat de vérifier que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles. L'application
$\varphi:E\to\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(u)=(u_0,u_1)$ étant un isomorphisme (car un élément de E est déterminé de façon unique par la donnée de ses deux premiers termes), on peut affirmer que l'espace E est de dimension 2.
b) Il est immédiat de vérifier que les suites (a_n) et (b_n) sont formés d'entiers naturels, qu'elles sont croissantes à partir du rang 1 et qu'elles sont à termes strictement positifs à partir du rang 2.
Ainsi

$$\forall n\geqslant 2,a_n,b_n\geqslant 1$$

et donc

$$a_{n+2}\geqslant n+1\text{ et }b_{n+2}\geqslant n+1$$

Ainsi les deux suites (a_n) et (b_n) tendent vers $+\infty$ en croissant (seulement à partir du rang 1 pour la première)
c) On a

$$w_{n+1}=\left((n+1)a_{n+1}+a_n\right)b_{n+1}-a_{n+1}\left((n+1)b_{n+1}+b_n\right)$$

Après simplification, on obtient

$$w_{n+1}=-w_n$$

et donc

$$w_n=(-1)^nw_0=(-1)^{n+1}$$

d) On a

$$c_{n+1}-c_n=\frac{w_n}{b_nb_{n+1}}=\frac{(-1)^{n+1}}{b_nb_{n+1}}$$

Puisque la suite de terme général b_nb_{n+1} croît vers $+\infty$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées et affirmer que la série numérique $\sum(c_{n+1}-c_n)$ converge. Par conséquent la suite (c_n) converge.

e) On a

$$\ell-c_n=\sum_{k=n}^{+\infty}(c_{k+1}-c_k)$$

Par le critère spécial des séries alternées, on peut borner ce reste par la valeur absolue de son premier terme

$$|\ell-c_n|\leqslant\frac{1}{b_nb_{n+1}}$$

On peut ainsi écrire

$$c_n=\ell+O\left(\frac{1}{b_nb_{n+1}}\right)$$

On a alors

$$a_n+rb_n=b_n(c_n+r)=b_n(\ell+r)+O\left(\frac{1}{b_{n+1}}\right)$$

Sachant $b_n\to+\infty$, on peut affirmer

$$a_n+rb_n\to0\Leftrightarrow r=-\ell$$

Exercice 56 : [énoncé]

Quand $x\to0$, on a

$$\frac{\sqrt{|x|}}{1+x}=\sqrt{|x|}-x\sqrt{|x|}+o\left(x^{3/2}\right)$$

On en déduit

$$u_n=\int_0^{(-1)^n/n^\alpha}\sqrt{|x|}\,\mathrm{d}x-\int_0^{(-1)^n/n^\alpha}x\sqrt{|x|}\,\mathrm{d}x+o\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right)$$

Par parité

$$u_n=\frac{(-1)^n2}{3n^{3\alpha/2}}-\frac{2}{5n^{5\alpha/2}}+o\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right)$$

Par le critère spécial des séries alternées, la série de terme général $(-1)^n/n^{3\alpha/2}$ converge et par équivalence de séries à termes de signe constant, la série de terme général

$$-\frac{2}{5n^{5\alpha/2}}+o\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right)\sim-\frac{2}{5n^{5\alpha/2}}$$

converge si, et seulement si, $5\alpha/2>1$.

On en déduit que la série de terme général u_n converge si, et seulement si, $\alpha>2/5$.

Exercice 57 : [énoncé]

a) $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}=O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ existe.

$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{4}{2n+1}$ donc

$\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{3}{n}+\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}-4\sum\limits_{n=2}^{2N+1}\frac{1}{n}$ or on sait que $\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=\ln N+\gamma+o(1)$ et on conclut que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}=3-4\ln2$.

b) $\sum\limits_{n=2}^{N}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\sum\limits_{n=2}^{N}\ln(n-1)+\ln(n+1)-2\ln n\to-\ln2$.

c) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)3^{-n}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\frac{1}{3^{n-k}}=\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}\right)\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{3^m}\right)=\frac{9}{4}$ via produit de Cauchy.

Exercice 58 : [énoncé]

$\frac{1}{k^2(k+1)^2}\sim\frac{1}{k^4}$ donc la série converge.

$\frac{1}{k^2(k+1)^2}=\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{2}{k+1}-\frac{2}{k}$ donc

$\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2(k+1)^2}=\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}+\sum\limits_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k^2}-1+2\sum\limits_{k=2}^{N+1}\frac{1}{k}-2\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{k}=\frac{\pi^2}{3}-3.$

Exercice 59 : [énoncé]

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\sim\frac{1}{n^3}$$

donc la série converge

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1/2}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1/2}{n+2}$$

puis après télescopage

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

Exercice 60 : [énoncé]
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 61 : [énoncé]
$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 2\mathrm{e}$.
$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)+n-2}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

Exercice 62 : [énoncé]
Tout d'abord la série $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k$ converge en vertu de la règle de d'Alembert.
$\sum_{k=0}^{n} kx^k = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = x\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' \to \frac{x}{(1-x)^2}$

Exercice 63 : [énoncé]
Par sommation géométrique

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{k+\alpha-1} + \frac{x^{n+\alpha}}{1+x}$$

donc

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k x^{k+\alpha-1}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^{n+\alpha}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} + \varepsilon_n$$

avec

$$0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \int_0^1 x^{n+\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+\alpha-1} \to 0$$

d'où la conclusion.

Exercice 64 : [énoncé]
Par sommation géométrique

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$$

Posons

$$I = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}\mathrm{d}x$$

Cette intégrale est bien définie car la fonction intégrée se prolonge par continuité en 1.

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k - I\right| \leqslant \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x} x^{n+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{M}{n+1}$$

avec

$$M = \sup_{[0,1]} \frac{\sin(\pi x)}{1-x}$$

On conclut que $\sum_{k=0}^{n} u_k \to I$ puis par changement de variable

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \to \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 65 : [énoncé]
a) $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \ln 2n + \gamma + o(1) - \ln n - \gamma = \ln 2 + o(1) \to \ln 2$
et $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + o(1)$ donc la série converge et est de somme égale à $\ln 2$.
b) $\sum_{k=1}^{3n} u_n = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k} - 3\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k} = \ln 3n + \gamma + o(1) - \ln n - \gamma = \ln 3 + o(1) \to \ln 3$ et $\sum_{k=1}^{3n+1} u_n = \sum_{k=1}^{3n} u_n + o(1) \to \ln 3$ et $\sum_{k=1}^{3n+2} u_n = \sum_{k=1}^{3n} u_n + o(1) \to \ln 3$ donc la série converge et est de somme égale à $\ln 3$.

Exercice 66 : [énoncé]
Par décomposition en éléments simples

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{(2n-1)} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{2}{m} - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 2\sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n}$$

Or

$$\sum_{n=N+1}^{2N}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=\ln(2N)+\gamma+o(1)-\ln N-\gamma=\ln 2+o(1)$$

puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n-1)}=2\ln 2$$

Exercice 67 : [énoncé]
a_p existe en vertu de la règle de d'Alembert.
$a_p=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)^p}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\left(a_p+\binom{p}{1}a_{p-1}+\cdots+\binom{p}{p}a_0\right)$ donc
$a_p=\binom{p}{1}a_{p-1}+\cdots+\binom{p}{p}a_0$ et par un récurrence aisée $a_p\in\mathbb{N}$.

Exercice 68 : [énoncé]
La somme existe en vertu du critère de Leibniz.

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\ln(1+1/n)=\sum_{n=1}^{N}\ln(2n+1)-\ln(2n)+\sum_{n=0}^{N-1}\ln(2n+1)-\ln(2n+2)$$

$$=2\sum_{n=1}^{N}\ln\frac{2n+1}{2n}-\ln(2N+1)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\ln(1+1/n)=\ln\left(\frac{(2n)!(2n+1)!}{2^{4n}(n!)^4}\right)$$

Or $n!\sim\sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n}$ donc

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\ln(1+1/n)\to\ln(2/\pi)$$

puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln(1+1/n)=\ln(2/\pi)$$

Exercice 69 : [énoncé]
a) $\frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)}=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)}$ existe.
$\frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)}=\frac{3}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}$ donc en exploitant $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=\ln N+\gamma+o(1)$ on obtient :
$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)}=3\ln\frac{n^3}{(n+1)(n+2)^2}+4+o(1)\to 4$
b) $\sum_{n=2}^{2N+1}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=\sum_{k=1}^{N}\ln(2k+1)-\ln(2k+1)=0$ et
$\sum_{n=2}^{2N}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=\sum_{n=2}^{2N+1}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)+o(1)\to 0$ donc $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=0$.

Exercice 70 : [énoncé]
On peut supposer $\alpha>0$ quitte à passer la suite à l'opposé.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1+\frac{b-a}{n-b}$$

Posons $v_n=n^{a-b}u_n$. $\ln v_{n+1}-\ln v_n=O\left(1/n^2\right)$ donc $(\ln v_n)$ converge puis

$$u_n\sim\frac{A}{n^{b-a}}\text{ avec }A>0$$

Par conséquent $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $b-a>1$.
$(n-b)u_{n+1}=(n-a)u_n$ donc

$$(n+1)u_{n+1}-nu_n=(b+1)u_{n+1}-au_n$$

En sommant et en notant $S=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$, on obtient $(b+1)(S-\alpha)-aS=0$ donc

$$S=\frac{(b+1)\alpha}{b+1-a}$$

Exercice 71 : [énoncé]

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=O(n^3)$$

donc $\sum\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$ converge.

Après décomposition en éléments simples :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2} = 18 - 24\ln 2$$

Exercice 72 : [énoncé]
Par sommation géométrique

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-t^4)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t^4)^{N+1}}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\left|\int_0^1 \frac{(-t^4)^{N+1}}{1+t^4}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 t^{4N+4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4N+5} \to 0$$

donc $\sum \frac{(-1)^n}{4n+1}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$$

Enfin

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi\right)$$

Exercice 73 : [énoncé]

$$\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} = \frac{1}{4n} - \frac{3}{4n} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la série étudiée est absolument convergente.
On a

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4}\right) = \sum_{k=1}^{4N+4} \frac{1}{k} - 4\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4n+2}$$

Or

$$4\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4n+2} = 2\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+1} = 2\sum_{k=1}^{2N+1} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k}$$

Par le développement

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

on parvient à

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4}\right) = \ln(4N+4)+\gamma-2\ln(2N+1)-2\gamma+\ln N+\gamma+o($$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4}\right) = 0$$

(ce qui change du $\ln 2$ traditionnel... ;-)

Exercice 74 : [énoncé]
La convergence de la série est assurée par la règle de d'Alembert.
On a

$$(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n - x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(1-x^n)} - \frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right)$$

Après télescopage

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Exercice 75 : [énoncé]
Introduisons la série entière de somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+3}}{(4n+1)(4n+3)}$$

On vérifie aisément que son rayon de convergence est égale à 1 et que sa somme est définie et continue sur $[-1,1]$ par convergence normale.
Sur $]-1,1[$

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+2}}{4n+1}$$

Pour $x \neq 0$

$$\left[\frac{1}{x}S'(x)\right]' = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}$$

On en déduit que sur $]-1,1[$

$$S'(x) = x\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^4}$$

puis

$$S(x)=\int_0^x t\int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{1-u^4}$$

Par intégration par parties

$$S(x)=\left[\frac{1}{2}(t^2-1)\int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{1-u^4}\right]_0^x+\frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{2}\frac{1-t^2}{1-t^4}\,\mathrm{d}t$$

et ainsi

$$S(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^4}+\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Quand $x\to 1^-$

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^4}=O\left(\ln(1-x)\right)=o(x-1)$$

donc

$$S(x)\to\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{8}$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}=S(1)=\frac{\pi}{8}$$

Exercice 76 : [énoncé]

1.a) Puisque $(n+k+1)!\geqslant(k+1)!$,

$$0\leqslant F(n,k)\leqslant\frac{(k!)^2}{\left((k+1)!\right)^2}=\frac{1}{(k+1)^2}$$

et par comparaison de série à termes positifs, on peut affirmer la convergence de la série de terme général $F(n,k)$, $k\in\mathbb{N}$.

1.b) On définit la fonction F puis on calcule les σ_n voulus

```
F:=(n,k)->(k!)^2/((n+k+1)!)^2:
sigma:=n->sum(F(n,k),k=0..infinity):
seq(sigma(n),n=0..10);
```

2.a) On définit la fonction G puis on compare les quantités proposées

```
G:=(n,k)->(3*n+2*k+3)*F(n,k):
simplify((n+1)^3*F(n+1,k)-(4*n+2)*F(n,k));
simplify(G(n,k+1)-G(n,k));
```

On constate que les quantités proposées sont égales.

2.b) En sommant les relations précédente pour $k\in\mathbb{N}$, on obtient

$$(n+1)^3\sigma_{n+1}-(4n+2)\sigma_n=\sum_{k=0}^{+\infty}G(n,k+1)-G(n,k)=-G(n,0)$$

grâce à la convergence des séries étudiées.

2.c) On passe du second membre de la relation précédente au second membre de la relation voulue en multipliant par le facteur

$$\frac{((n+1)!)^4}{(n+1)^3(2n+2)!}$$

On peut alors présumer

$$P_n=\frac{(n+1)^3(2n+2)!}{(4n+2)\left((n+1)!\right)^4}=\frac{(2n)!}{(n!)^4}$$

et vérifier avec Maple que cette quantité convient

```
P:=n->(2*n)!/(n!)^4;
P(n+1);
simplify(1/((n+1)!)^4*(n+1)^3*(2*n+2)!/(n+1)^3);
```

3. On observe que

$$-3\frac{\left((n+1)!\right)^2}{(n+1)^2(2n+2)!}=-3\frac{1}{(n+1)^2C_{2(n+1)}^{n+1}}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2C_{2n}^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\sigma_n}{P_n}-\frac{\sigma_{n+1}}{P_{n+1}}\right)=\frac{1}{3}\frac{\sigma_0}{P_0}$$

avec convergence des séries engagées car $\sigma_n/P_n=O\left(1/P_n\right)\to 0$.

On en déduit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2C_{2n}^n}=\frac{\pi^2}{18}$$

Exercice 77 : [énoncé]

Selon que $\alpha<0$ ou $\alpha\geqslant 0$, on encadre $1/k^\alpha$ en exploitant la monotonie de $x\mapsto 1/x^\alpha$.

Sachant que
$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}t^{1-\alpha} + C^{te} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$$
on obtient
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Exercice 78 : [énoncé]
Puisque $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante : $\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ donc $\int_{N+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant R_N \leqslant \int_N^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ d'où l'on obtient : $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

Exercice 79 : [énoncé]
a) Par croissance de la fonction $\sqrt{.}$
$$\int_{k-1}^k \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{k} \leqslant \int_k^{k+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$
donc
$$\int_0^n \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leqslant \int_1^{n+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$
et on conclut aisément.
b) On a
$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k$$
et, par croissance de la fonction ln,,
$$\int_{k-1}^k \ln t\,\mathrm{d}t \leqslant \ln k \leqslant \int_k^{k+1} \ln t\,\mathrm{d}t$$
donc
$$\int_1^n \ln t\,\mathrm{d}t \leqslant \ln n! \leqslant \int_1^{n+1} \ln t\,\mathrm{d}t$$
puis on peut conclure.
c) Par décroissance de la fonction $x \mapsto 1/x\ln x$ sur $[1/\mathrm{e}, +\infty[$,
$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \frac{1}{k\ln k} \leqslant \int_{k-1}^k \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$
donc
$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln k} \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$
puis on conclut via
$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \ln(\ln t) + C^{te} \to +\infty$$

Exercice 80 : [énoncé]
Si $\alpha \leqslant 0$ alors à partir d'un certain rang $u_n \geqslant 1/n$ et la série diverge.
Si $\alpha > 0$ alors la fonction $x \mapsto 1/x(\ln x)^\alpha$ est décroissante sur $]1, +\infty[$.
$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\alpha} \leqslant u_n \leqslant \int_{n-1}^n \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\alpha}$$
donc
$$\int_3^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\alpha} \leqslant \sum_{n=3}^N u_n \leqslant \int_2^N \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\alpha}$$
puis
$$\int_{\ln 3}^{\ln N+1} \frac{\mathrm{d}u}{u^\alpha} \leqslant \sum_{n=3}^N u_n \leqslant \int_{\ln 2}^{\ln N} \frac{\mathrm{d}u}{u^\alpha}$$
et on peut conclure qu'il y a convergence si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Exercice 81 : [énoncé]
Puisque $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est décroissante :
$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^k \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$
donc
$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$
d'où l'on obtient : $u_n \sim 1/n$.
Il y a donc divergence de la série de terme général u_n.

Exercice 82 : [énoncé]
Par comparaison avec une intégraleintégrale

$$\int_1^n (\ln t)^2 \, dt \leqslant \sum_{k=1}^n (\ln k)^2$$

Or par une intégration par parties on obtient

$$\int_1^n (\ln t)^2 \, dt \sim n(\ln n)^2$$

donc $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ avec

$$v_n \sim \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

On peut alors conclure que la série des u_n diverge par comparaison avec une série de Bertrand.

Exercice 83 : [énoncé]
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant croissante,

$$\int_0^n \sqrt{x} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leqslant \int_1^{n+1} \sqrt{x} \mathrm{d}x$$

et donc

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n^{3/2}$$

Il y a donc convergence de la série de terme général u_n si, et seulement si,$\alpha > 5/2$.
Par l'encadrement qui précède :

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - \int_0^n \sqrt{x} \mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1} \sqrt{x} \mathrm{d}x \leqslant \sqrt{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{2}{3} n^{3/2} + O(\sqrt{n})$$

puis

$$(-1)^n u_n = \frac{(-1)^n 2}{3n^{\alpha - 3/2}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha - 1/2}}\right)$$

Pour $\alpha > 5/2$: il y a absolue convergence comme ci-dessus.
Pour $3/2 < \alpha \leqslant 5/2$: il y a convergence par somme d'une série convergente et d'une série absolument convergente.
Pour $\alpha \leqslant 3/2$: il y a divergence grossière.

Exercice 84 : [énoncé]
Puisque $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

donc

$$\int_{N+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant R_N \leqslant \int_N^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

d'où l'on obtient :

$$R_n \sim \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha - 1}}$$

puis

$$\frac{R_n}{S_n} \sim \frac{1}{(\alpha - 1)S_\infty n^{\alpha - 1}}$$

La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{R_n}{S_n}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

Exercice 85 : [énoncé]
$\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ donc $\sum_{n=1}^p \frac{u_n}{S_n^\alpha} \leqslant \int_{S_0}^{S_p} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}\left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_{S_0}^{S_p} \leqslant \frac{1}{\alpha - 1} < +\infty$.

Exercice 86 : [énoncé]
Puisque $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante : $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ donc $\frac{1}{\alpha - 1} \leqslant \zeta(\alpha) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$. Par suite $(\alpha - 1)\zeta(\alpha) \xrightarrow[\alpha \to 1+]{} 1$.

Exercice 87 : [énoncé]
Notons que $\frac{a}{n^2 + a^2} \sim \frac{a}{n^2}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$ existe.
La fonction $x \mapsto \frac{a}{x^2 + a^2}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$ donc par comparaison série-intégrale
$\int_1^{N+1} \frac{a}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^N \frac{a}{n^2 + a^2} \leqslant \int_0^N \frac{a}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x$ puis sachant $\int \frac{a}{x^2 + a^2} = \arctan \frac{x}{a} + C^{te}$,
$\arctan \frac{N+1}{a} - \arctan \frac{1}{a} \leqslant \sum_{n=1}^N \frac{a}{n^2 + a^2} \leqslant \arctan \frac{N}{a}$.
Quand $N \to +\infty$: $\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{a} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} \leqslant \frac{\pi}{2}$.
Par le théorème des gendarmes donc $\lim_{a \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 88 : [énoncé]

a) Pour définir u_n, il est nécessaire de supposer $\alpha > 1$.
Par comparaison avec une intégrale, on montre

$$u_n \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

b) Pour définir u_n, il est nécessaire de supposer $\alpha > 0$.
Par application du critère spécial des séries alternées, v_n étant le reste de la série $\sum \frac{(-1)^p}{(p+1)^\alpha}$ est du signe de $(-1)^n$ et $|v_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)^\alpha} \to 0$.
De plus

$$|v_n| - |v_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+n+1)^\alpha} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+n+2)^\alpha}$$

donc

$$|v_n| - |v_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{(p+n+1)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+2)^\alpha}\right)$$

Par le théorème des accroissements finis

$$\frac{1}{(p+n+1)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+2)^\alpha} = -\frac{\alpha}{(c_n)^{\alpha+1}}$$

avec $c_n \in \left]p+n+1, p+n+2\right[$.
La suite (c_n) est croissante donc on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à

$$\sum (-1)^p \left(\frac{1}{(p+n+1)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+2)^\alpha}\right)$$

et conclure que sa somme est du signe de son premier terme. Au final, $(|v_n|)$ est décroissant et en appliquant une dernière fois le critère spécial des séries alternées, on conclut que $\sum v_n$ converge.

Exercice 89 : [énoncé]

a) $\sum\limits_{n\geqslant 1} f(n)$ diverge et $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n f(n)$ converge en application du critère spécial.

b) Pour $n \geqslant 4$, $f(n) \leqslant \int_{n-1}^n f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(n-1)$ donc $\int_{n-1}^n f(t)\mathrm{d}t - f(n) \geqslant 0$ et $\int_{n-1}^n f(t)\mathrm{d}t - f(n) \leqslant f(n-1) - f(n)$ avec $\sum\limits_{n=4}^{+\infty} f(n-1) - f(n) = f(3)$ donc la série de terme général $\int_{n-1}^n f(t)\mathrm{d}t - f(n)$ converge et il en est de même de la série de terme général $f(n) - \int_{n-1}^n f(t)\mathrm{d}t$.

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^k f(k)$ avec
$\sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^k f(k) = 2\sum\limits_{k=1}^{n} f(2k) - \sum\limits_{k=1}^{2n} f(k)$.
$\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + \sum\limits_{k=2}^{n} f(k) - \int_{k-1}^k f(t)\mathrm{d}t + \int_1^n f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C$.
$2\sum\limits_{k=1}^{n} f(2k) = \ln 2 \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = \ln 2 \ln n + \ln(2)\gamma + o(1) + \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C$
et enfin $2\sum\limits_{k=1}^{n} f(2k) - \sum\limits_{k=1}^{2n} f(k) = \ln(2)\gamma - \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + o(1)$. Au final
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{2}\ln(2)(2\gamma - \ln 2)$.

Exercice 90 : [énoncé]

$A_n = a + \frac{b(n+1)}{2}$, $\ln B_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(a+bk)$. Posons $f(t) = \ln(a+bt)$ fonction croissante.
A l'aide d'une comparaison série-intégrale : $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = n\ln(a+bn) - n + o(n)$
donc $\ln \frac{B_n}{A_n} = \ln B_n - \ln A_n = \ln\left(\frac{a+bn}{a+bn/2}\right) - 1 + o(1) \to \ln 2 - 1$ d'où $\frac{B_n}{A_n} \to \frac{2}{\mathrm{e}}$.

Exercice 91 : [énoncé]

a) a) Une comparaison série intégrale est inadaptée, f n'est pas monotone comme en témoigne ses changements de signe. En revanche :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) - f(n)\,\mathrm{d}x$$

Or par le théorème des accroissements fini,

$$f(x) - f(n) = f'(c_x)(x-n)$$

avec $c_x \in \left]n, x\right[$.
Après calcul de $f'(x)$, on en déduit

$$|f(x) - f(n)| \leqslant \frac{1}{3n^{4/3}} + \frac{2}{3n^{5/3}}$$

puis $u_n = O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$.

b) La série de terme général $\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge car $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = 3\sin\left(n^{1/3}\right)$ diverge. En effet si $\sin\left(n^{1/3}\right)$ convergeait vers ℓ alors par extraction $\sin(n)$ aussi et

il est classique d'établir la divergence de $(\sin(n))$. On en déduit que $\sum \frac{\cos(n^{1/3})}{n^{2/3}}$ diverge.
c) Il suffit de reprendre la même étude pour parvenir à la même$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - f(n)$ conclusion.

Exercice 92 : [énoncé]
Par comparaison série intégral,

$$\sum_{k=2}^{n} \ln^2 k \sim n(\ln n)^2$$

donc

$$u_n = \frac{n^\alpha}{\sum\limits_{k=2}^{n} \ln^2 k} \sim \frac{1}{n^{1-\alpha}(\ln n)^2}$$

Par référence aux séries de Bertrand, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha \leqslant 0$.

Exercice 93 : [énoncé]
Par comparaison série intégrale :
Si $\alpha > 0$, $u_n \sim \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$ est terme général d'une série absolument convergente.
Si $-1 < \alpha < 0$, $u_n \sim \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$ n'est pas le terme général d'une série convergente.
Si $\alpha = -1$, $u_n \sim \frac{1}{\ln n}$ n'est pas le terme général d'une série convergente.
Si $\alpha < -1$, $u_n \not\to 0$ et donc $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Exercice 94 : [énoncé]
a) Après calculs, $|f'(x)| \leqslant 2/x^2$.
b) Par intégration par parties
$\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = [(t-(n-1)f(t)]_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n} (t-(n-1))f'(t)\,\mathrm{d}t$ donc
$|u_n| \leqslant \int_{n-1}^{n} (t-(n-1))\,|f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n-1}^{n} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$. L'intégrabilité de f' suffit pour conclure.
c) Si la suite $(\cos(\ln n))$ converge alors la suite extraite $(\cos(n\ln 2))$ aussi. Notons ℓ sa limite. Comme $\cos((n+1)\ln 2) + \cos((n-1)\ln 2) = 2\cos(n\ln 2)\cos(\ln 2)$ on obtient à la limite $2\ell = 2\ell\cos(\ln 2)$ et donc $\ell = 0$. Comme
$\cos(2n\ln 2) = 2\cos^2(n\ln 2) - 1$ on obtient à la limite $\ell = 2\ell^2 - 1$ ce qui est incompatible avec $\ell = 0$.
d) $\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = -\cos(\ln n) + \cos(\ln(n-1))$. La divergence de la suite $(\cos(\ln n))$ entraîne la divergence de la série $\sum \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ et puisque la série $\sum u_n$ converge, on peut affirmer que $\sum f(n)$ diverge.

Exercice 95 : [énoncé]
La fonction $f_n$est continue, strictement décroissante et de limites $+\infty$ et 0 en n et $+\infty$. On en déduit que f_n réalise une bijection de $]n,+\infty[$ vers $]0,+\infty[$. Ainsi, pour tout $a > 0$, il existe un unique $x_n > n$ vérifiant $f_n(x_n) = a$.
$f_n(n+1+y) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1+y-k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+y} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t+y} = \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{t+y} = \ln\left(1+\frac{n}{y}\right)$.
Pour $y = \frac{n}{\mathrm{e}^a-1}$, $f(n+1+y) \leqslant \ln(1+(\mathrm{e}^a-1)) = a$ et par suite $x_n \leqslant n+1+\frac{n}{\mathrm{e}^a-1}$.
Aussi
$f(n+y) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{y+k} \geqslant \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{t+y} = \ln\left(1+\frac{n}{y}\right)$.
Pour $y = \frac{n}{\mathrm{e}^a-1}$, $f(n+y) \geqslant a$ et par suite $x_n \geqslant n+\frac{n}{\mathrm{e}^a-1}$.
On en déduit $x_n \sim n+\frac{n}{\mathrm{e}^a-1} = \frac{\mathrm{e}^a n}{\mathrm{e}^a-1}$.

Exercice 96 : [énoncé]
On remarque

$$n\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{\frac{n}{k}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{+\infty}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x}$.
La fonction φ est décroissante en tant que produit de deux fonctions décroissantes positives. Par suite

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

En sommant et en exploitant l'intégrabilité de φ au voisinage de $+\infty$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{1/t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{(n-1)/n}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{1/t}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{1/t}\right]_1^{+\infty} = \mathrm{e}-1 \text{ et } \int_{(n-1)/n}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{1/t}\right]_{(n-1)/n}^{+\infty} \to \mathrm{e}-1$$

Par encadrement

$$\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{\frac{n}{k}}\right) = \mathrm{e}-1$$

Exercice 97 : [énoncé]
Introduisons la somme partielle

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{a_n}}{n^3}$$

On remarque que pour $n \in \left\{10^{p-1}, \dots, 10^p - 1\right\}$ on a $a_n = p$
En regroupant pertinemment les termes sommés

$$S_{10^q-1} = \sum_{p=1}^{q} \sum_{n=10^{p-1}}^{10^p-1} \frac{x^{a_n}}{n^3} = \sum_{p=1}^{q} \sum_{n=10^{p-1}}^{10^p-1} \frac{x^p}{n^3} = \sum_{p=1}^{q} u_p x^p$$

Puisque la fonction $t \mapsto 1/t^3$ est décroissante, on a la comparaison

$$\int_{10^{p-1}}^{10^p} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant u_p = \sum_{n=10^{p-1}}^{10^p-1} \frac{1}{n^3} \leqslant \int_{10^{p-1}-1}^{10^p-1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

Après calculs, on obtient

$$u_p \sim \frac{99}{2} \frac{1}{100^p}$$

Cas $x \geqslant 0$
La série $\sum u_p x^p$ converge si, et seulement si, $x < 100$.
Puisque la série $\sum x^{a_n}/n^3$ est à termes positifs, sa convergence équivaut à la convergence d'une suite extraite de sommes partielles et donc $\sum x^{a_n}/n^3$ converge si, et seulement si, $x < 100$.
Cas $x < 0$.
Pour $x \in \left]-100, 0\right[$, il y a absolue convergence de la série en vertu de l'étude qui précède.
Pour $x \leqslant -100$, on peut écrire $x = -y$ avec $y \geqslant 100$, on a alors

$$S_{10^q-1} = \sum_{p=1}^{q} (-1)^q u_q y^q$$

avec $(u_q y^q)$ qui ne tend pas vers zéro.
Il y a alors divergence d'une suite extraite de sommes partielles et donc divergence de la série $\sum x^{a_n}/n^3$.

Exercice 98 : [énoncé]
Montrons que la série étudiée est divergente. Notons S_n la somme partielle de rang n de cette série. Nous allons construire deux suites (a_n) et (b_n) de limite $+\infty$ telles que $S_{b_n} - S_{a_n}$ ne tend pas zéros ce qui assure la divergence de la série étudiée.
Soit $n \geqslant 1$ fixé. Les indices k vérifiant

$$2n\pi - \frac{\pi}{4} \leqslant \sqrt{k} \leqslant 2n\pi + \frac{\pi}{4}$$

sont tels que

$$\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i\sqrt{k}}) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Posons alors

$$a_n = E\left((2n\pi - \pi/4)^2\right) \text{ et } b_n = E\left((2n\pi + \pi/4)^2\right)$$

On a

$$S_{b_n} - S_{a_n} = \sum_{k=a_n+1}^{b_n} \frac{\mathrm{e}^{i\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$$

et donc par construction

$$\mathrm{Re}\left(S_{b_n} - S_{a_n}\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=a_{n+1}}^{b_n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Puisque la fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est décroissante, on a la comparaison intégrale

$$\mathrm{Re}\left(S_{b_n} - S_{a_n}\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=a_n+1}^{b_n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \sqrt{2}\left(\sqrt{b_n+1} - \sqrt{a_n+1}\right)$$

Or

$$\sqrt{b_n+1} - \sqrt{a_n+1} = \frac{b_n - a_n}{\sqrt{b_n+1} + \sqrt{a_n+1}} \sim \frac{2n\pi^2}{4n\pi} \to \frac{\pi}{2}$$

donc $S_{b_n} - S_{a_n}$ ne tend par 0 et l'on peut conclure que la série étudiée diverge.

Exercice 99 : [énoncé]
Posons $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$.
On observe $u_n = 2H_n - H_{n^2} = 2(\ln n + \gamma + o(1)) - \ln(n^2) - \gamma + o(1) \to \gamma$.

Exercice 100 : [énoncé]
a) $u_n > 0$ et

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{a-1}{k}\right)$$

Si $a=1$ alors $u_n=1\to 1$,.
Si $a>1$ alors
$$\ln\left(1+\frac{a-1}{k}\right)\sim\frac{a-1}{k}$$
donc $\ln u_n\to+\infty$ puis $u_n\to+\infty$.
Si $a<1$ alors $\ln u_n\to-\infty$ et donc $u_n\to 0$.
b) Si $a\geqslant 1$ il y a divergence grossière de la série.
Si $a\in\,]0,1[$ alors
$$\ln u_n\sim\sum_{k=1}^n\frac{a-1}{k}=(a-1)\ln n$$
et donc
$$\ln(ku_n)=\ln k+(a-1)\ln k+o(\ln k)\sim a\ln k\to+\infty$$
Ainsi $ku_n\to+\infty$ et à partir d'un certain rang $u_n\geqslant 1/k$.
La série de terme général u_n s'avère divergente

Exercice 101 : [énoncé]
a)
$$\ln u_{n+1}-\ln u_n=\ln\frac{u_{n+1}}{u_n}=\ln\frac{2n+1}{2n+2}=\ln\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)\sim-\frac{1}{2n}$$
La série $\sum\ln u_{n+1}-\ln u_n$ tend vers $-\infty$ donc $\ln u_n\to-\infty$ puis $u_n\to 0$.
b) Posons $v_n=\sqrt{n}u_n$.
$$\ln v_{n+1}-\ln v_n=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln u_{n+1}-\ln u_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
La série $\sum\ln v_{n+1}-\ln v_n$ converge et donc la suite $\ln v_n$ aussi.
En posant ℓ sa limite, on obtient $\sqrt{n}u_n\to C$ avec $C=\mathrm{e}^\ell>0$.

Exercice 102 : [énoncé]
a) $\ln u_{n+1}-\ln u_n=\ln\frac{u_{n+1}}{u_n}=\ln\frac{2n+1}{2n+2}=\ln\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)\sim-\frac{1}{2n}$. La série $\sum\ln u_{n+1}-\ln u_n$ tend vers $-\infty$ donc $\ln u_n\to-\infty$ puis $u_n\to 0$.
b) $\ln(n+1)u_{n+1}-\ln nu_n=\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)\sim\frac{1}{2n}$. La série $\sum\ln(n+1)u_{n+1}-\ln nu_n$ tend vers $+\infty$ donc $\ln nu_n\to+\infty$ puis $nu_n\to+\infty$. A partir d'un certain rang $nu_n\geqslant 1$ donc $\sum u_n$ diverge.
c) $(2k+4)v_{k+1}=2u_{k+1}=\frac{2k+1}{k+1}u_k=(2k+1)v_k$ en sommant pour $k\in\{0,\dots,n\}$ et en simplifiant, on obtient : $T_n=2-(2n+6)v_{n+1}$ donc $T_n\to 2$.

Exercice 103 : [énoncé]
Après calculs $\ln u_{n+1}-\ln u_n=O(1/n^2)$ donc $\ln u_n$ converge et on peut conclure.

Exercice 104 : [énoncé]
$\ln(P_n)=\sum_{k=2}^n\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$ avec
$$\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)=\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2k}+O\left(\frac{1}{k\sqrt{k}}\right)$$
donc $\ln P_n=-\frac{1}{2}\ln n+\lambda+o(1)$ puis $P_n\sim\frac{\mathrm{e}^\lambda}{\sqrt{n}}$.

Exercice 105 : [énoncé]
a) (P_n) est croissante et $\ln P_n=\sum_{k=1}^n\ln(1+|u_k|)\leqslant\sum_{k=1}^n|u_k|\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}|u_k|<+\infty$ donc (P_n) est majorée.
Par suite (P_n) convergente.
b) $|\Pi_m-\Pi_n|=|\Pi_n|\left|\prod_{k=n+1}^m(1+u_k)-1\right|$ or $|\Pi_n|\leqslant P_n$ et lorsqu'on développe l'expression $\prod_{k=n+1}^m(1+u_k)-1$ on obtient une expression polynomiale en les $u_{n+1},\dots,u_m$ à coefficients positifs qui est inférieure en module à la même expression obtenue en les $|u_{n+1}|,\dots,|u_m|$. Ainsi :
$\left|\prod_{k=n+1}^m(1+u_k)-1\right|\leqslant\prod_{k=n+1}^m(1+|u_k|)-1$.
Ainsi $|\Pi_m-\Pi_n|\leqslant|P_m-P_n|$ et donc (Π_n) est de Cauchy.

Exercice 106 : [énoncé]
$$\int_0^1\frac{(1-u)^n-1}{u}\mathrm{d}u=-\int_0^1\frac{v^n-1}{v-1}=-\int_0^1\sum_{k=0}^{n-1}v^k\mathrm{d}v$$
puis
$$\int_0^1\frac{(1-u)^n-1}{u}\mathrm{d}u=-\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}=-\ln n-\gamma+o(1)$$
donc $u_n\to-\gamma$

Exercice 107 : [énoncé]
a)
$$\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln\left(1+\frac{a-b}{n}\right) \sim \frac{a-b}{n}$$
est le terme général d'une série divergeant vers $-\infty$. Par suite $\ln u_n \to -\infty$ et donc $u_n \to 0$.
b)
$$\ln v_{n+1} - \ln v_n = \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{a-b}{n}\right) = \frac{\alpha+a-b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
donc pour $\alpha = b-a$, la série des $\ln v_{n+1} - \ln v_n$ converge. Par suite v_n converge vers un réel $A > 0$ et alors
$$u_n \sim \frac{A}{n^{b-a}}$$
c) On a
$$(b-a-1)u_n = (1-b)(u_{n+1}-u_n) - ((n+1)u_{n+1} - nu_n)$$
donc par télescopage
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{b-1}{b-a-1}u_0$$

Exercice 108 : [énoncé]
Notons que les termes de la suite (u_n) sont tous non nuls car $-\alpha \notin \mathbb{N}^\star$.
a) $\frac{(n+1)^\beta u_{n+1}}{n^\beta u_n} = 1 + \frac{\alpha+\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $v_n = \frac{\alpha+\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\beta = -\alpha$.
b) $\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \ln(n^{-\alpha}u_n) \to \ell = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k \in \mathbb{R}$ donc $n^{-\alpha}u_n \to e^\ell$ puis $u_n \sim An^\alpha$ avec $A = e^\ell > 0$.

Exercice 109 : [énoncé]
a)
$$\frac{(n+1)^\beta u_{n+1}}{n^\beta u_n} = 1 + \frac{\alpha+\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
donc
$$v_n = \frac{\alpha+\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\beta = -\alpha$.
b)
$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \ln(n^{-\alpha}u_n) \to \ell = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k \in \mathbb{R}$$
donc $n^{-\alpha}u_n \to e^\ell$ puis $u_n \sim An^\alpha$ avec $A = e^\ell > 0$.

Exercice 110 : [énoncé]
a) $\ln u_{n+1} - \ln u_n \sim -\frac{1}{2}\frac{x}{n}$ avec $x > 0$ donc $\sum_{k=1}^{n} \ln u_{k+1} - \ln u_k \to -\infty$ puis $u_n \to 0$.
b) Pour $\alpha = -x/2$, $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ converge.
c) Puisque $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{u_{n+1}}{(n+1)^\alpha} - \ln\frac{u_n}{n^\alpha}$, la suite de terme général $\ln\frac{u_n}{n^\alpha}$ converge puis $\frac{u_n}{n^\alpha} \to A$ avec $A > 0$.
d) Par comparaison de séries à termes positifs,$\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha < -1$ i.e. $x > 2$.

Exercice 111 : [énoncé]
a) Par récurrence $0 \leqslant u_n \leqslant u_0/2^n$.
b) $\ln(2^{n+1}u_{n+1}) - \ln(2^n u_n) = \ln\left(\frac{\sin(u_n/2)}{u_n/2}\right) \sim -\frac{1}{6}\left(\frac{u_n}{2}\right)^3$ est terme général d'une série convergente donc la suite $(\ln(2^n u_n))$ converge et finalement $(2^n u_n)$ converge vers un réel A strictement positif.
c) $u_n - A2^{-n} = 2^{-n}\sum_{k=n}^{+\infty} 2^k u_k - 2^{k+1}u_{k+1}$. Or
$2^k u_k - 2^{k+1}u_{k+1} \sim \frac{2^{k+1}}{6}\left(\frac{u_k}{2}\right)^3 \sim \frac{A^3}{24.2^{2k}}$.
Par comparaison de reste de série convergente à termes positifs,
$u_n - A2^{-n} \sim 2^{-n}\frac{A^3}{24}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^{2k}} = \frac{A^3}{18.2^{-3n}}$.

Exercice 112 : [énoncé]
a) On sait
$$H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$
donc
$$a_n = H_{3n} - H_n \to \ln(3) = \lambda$$
b) Si on sait
$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

les choses vont assez vites... mais sans doute l'examinateur souhaitera la démonstration de ce résultat.

$$a_n = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \sum_{k=n+1}^{3n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

avec

$$\sum_{k=n+1}^{3n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \ln 3$$

donc

$$a_n - \lambda = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

Or $\sum \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ est absolument convergente car

$$\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \sim -\frac{1}{2k^2}$$

donc $a_n - \lambda = R_n - R_{3n}$ avec

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

Or par sommation d'équivalent sur des restes de séries convergentes à termes de signe constant,

$$R_n \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} -\frac{1}{2k^2} \sim -\frac{1}{2n}$$

(le dernier équivalent s'obtenant, soit par comparaison série intégrale, soit par $\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k-1)}$ et sommation télescopique).
Au final

$$a_n - \lambda = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{3n}$$

Exercice 113 : [énoncé]
Non, en effet considérons

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, on a $u_{np} - u_n = \sum_{k=n+1}^{np} \frac{1}{k \ln k}$

On en déduit

$$0 \leqslant u_{np} - u_n \leqslant \frac{np - (n+1) + 1}{n \ln n} = \frac{p-1}{\ln n} \to 0$$

alors que

$$u_n \geqslant \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = [\ln(\ln t)]_2^{n+1} \to +\infty$$

Exercice 114 : [énoncé]
On observe que $u_{n+1}^n - u_n^{n-1} = n$.
Puisque $\sum n$ une série à termes positifs divergente on peut, par sommation de relation de comparaison, affirmer $u_{n+1}^n \sim \frac{1}{2}n^2$. En composant avec le logarithme népérien cet équivalent de limite infini, on obtient $n \ln u_{n+1} \sim 2 \ln n$ puis $\ln u_{n+1} \sim 2\frac{\ln n}{n}$. Par suite $u_{n+1} \to 1$ puis $u_{n+1} = 1 + 2\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.
Posons $v_n = u_{n+1} - 1 - 2\frac{\ln n}{n}$. $u_{n+1}^n = \exp\left(n \ln\left(1 + 2\frac{\ln n}{n} + v_n\right)\right)$ donne $u_{n+1}^n = \exp\left(2\ln n + nv_n + O\left((\ln n)^2/n\right)\right)$.
Or $\frac{2u_{n+1}^n}{n^2} \to 1$ donc $\exp\left(2 + nv_n + O\left((\ln n)^2/n\right)\right) \to 1$ puis $nv_n \to -2$. Ainsi $u_{n+1} = 1 + 2\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 115 : [énoncé]
a) Si $\alpha \leqslant 0$, il y a divergence grossière. Si $\alpha > 0$ alors $n^2 u_n \to 0$ et la série est absolument convergente.
b) Si $\alpha \leqslant 1$ alors $u_n \geqslant 1/n$ pour n assez grand et il y a divergence par comparaison de séries à termes positifs.
Si $\alpha > 1$ alors pour $\gamma \in]1, \alpha[$ on a $n^\gamma u_n \to 0$ et il y a absolue convergence.
c) Si $\alpha \leqslant 1$ alors $u_n \geqslant 1$ et la série est grossièrement divergente.
Si $\alpha > 1$ alors $n^2 u_n = \exp(2\ln n - (\ln n)^\alpha) \to 0$ donc la série est absolument convergente.

Exercice 116 : [énoncé]
Si $\alpha < 1$ alors $n\frac{1}{n^\alpha \ln n} \to +\infty$ donc pour n assez grand $\frac{1}{n^\alpha \ln n} \geqslant \frac{1}{n}$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série diverge
Si $\alpha > 1$ alors considérons $\beta \in]1, \alpha[$. On a $n^\beta \frac{1}{n^\alpha \ln n} \to 0$ donc la série est absolument convergente.
Si $\alpha = 1$ alors exploitons la décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ sur $]1, +\infty[$.
Pour $k \geqslant 2$,

$$\frac{1}{k \ln k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t}$$

donc

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}\geqslant\int_{2}^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}=[\ln(\ln t)]_2^{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$$

Par suite, la série étudiée diverge.

Exercice 117 : [énoncé]
On a

$$\ln n+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)=(1+a+b)\ln n+\frac{a+2b}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Il y a convergence si, et seulement si, $1+a+b=0$ et $a+2b=0$ ce qui correspond à $a=-2$ et $b=1$.
Dans ce cas :

$$\sum_{n=1}^{N}\ln n+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)=\sum_{n=1}^{N}\ln n-2\sum_{n=2}^{N+1}\ln n+\sum_{n=3}^{N+2}\ln n$$

puis

$$\sum_{n=1}^{N}\ln n+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)=\ln 1+\ln 2-2\ln 2-2\ln(N+1)+\ln(N+1)+\ln(N+2)\to-\ln 2$$

Exercice 118 : [énoncé]
On a

$$\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}=(1+a+b)\sqrt{n}+\frac{a+2b}{2\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Il y a convergence si, et seulement si, $1+a+b=0$ et $a+2b=0$ ce qui correspond à $a=-2$ et $b=1$.
Dans ce cas :

$$\sum_{n=1}^{N}\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}=\sum_{n=1}^{N}\sqrt{n}-2\sum_{n=2}^{N+1}\sqrt{n}+\sum_{n=3}^{N+2}\sqrt{n}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}=\sqrt{1}+\sqrt{2}-2\sqrt{2}-2\sqrt{N+1}+\sqrt{N+1}+\sqrt{N+2}$$

et enfin

$$\sum_{n=1}^{N}\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}\to 1-\sqrt{2}$$

Exercice 119 : [énoncé]
Posons u_n le terme général de la suite étudiée.
$u_{3n+3}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a}{\sqrt{3k+1}}+\frac{b}{\sqrt{3k+2}}+\frac{c}{\sqrt{3k+3}}$. Or
$\frac{a}{\sqrt{3k+1}}+\frac{b}{\sqrt{3k+2}}+\frac{c}{\sqrt{3k+3}}=\frac{a+b+c}{\sqrt{3k}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ donc $a+b+c=0$ est une condition nécessaire pour la convergence de (u_{3n+3}) et donc a fortiori pour la convergence de (u_n). Inversement si cette condition est satisfaite alors
$\frac{a}{\sqrt{3k+1}}+\frac{b}{\sqrt{3k+2}}+\frac{c}{\sqrt{3k+3}}=O\left(\frac{1}{k\sqrt{k}}\right)$ et donc (u_{3n+3}) converge. De plus $u_{3n+1}=u_{3n+3}+o(1)$ et $u_{3n+2}=u_{3n+3}+o(1)$ donc les trois suites (u_{3n+1}), (u_{3n+2}) et (u_{3n+3}) convergent vers une même limite, on peut donc conclure que (u_n) converge.

Exercice 120 : [énoncé]
Si $|\lambda|=1$ il y a divergence grossière dans les trois cas.
Si $|\lambda|>1$ alors $u_n\sim\frac{1}{\lambda^n}$, $v_n\sim 1$ et $w_n\sim\frac{1}{\lambda^{2n}}$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent et $\sum v_n$ diverge.
Si $|\lambda|<1$ alors $u_n\sim\lambda^n$, $v_n\sim\lambda^{2n}$ et $w_n\sim 1$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent tandis que $\sum w_n$ diverge.

Exercice 121 : [énoncé]
$u_n=\frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}\left(1-\frac{(-1)^n}{2n^\alpha}+O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right)=\frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}-\frac{1}{2n^{3\alpha/2}}+O\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right)$.
Si $\alpha\leqslant 0$ alors $u_n\not\to 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 2}u_n$ diverge. Si $\alpha>0$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.
Si $\frac{3\alpha}{2}>1$ alors $-\frac{1}{2n^{3\alpha/2}}+O\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente et donc $\sum\limits_{n\geqslant 2}u_n$ converge. Si $\frac{3\alpha}{2}\leqslant 1$ alors $-\frac{1}{2n^{3\alpha/2}}+O\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right)\sim\frac{-1}{2n^{3\alpha/2}}$ (de signe constant) est le terme général d'une série divergente donc $\sum\limits_{n\geqslant 2}u_n$.

Exercice 122 : [énoncé]
La condition $\alpha>0$ est nécessaire pour qu'il n'y ait pas divergence grossière.
Pour $\alpha>0$,

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+\frac{1}{n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente et la série de terme général

$$\frac{1}{n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\sim\frac{1}{n^{2\alpha}}$$

est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1/2$.
Finalement la série initiale converge si, et seulement si, $\alpha > 1/2$.

Exercice 123 : [énoncé]
a) Par convergence dominée par la fonction $\varphi : t \mapsto 1$, on obtient $u_n \to 0$.
b)

$$u_n + u_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (\tan t)'(\tan t)^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

c) On vérifie aisément $u_n \to 0^+$ et $u_{n+1} \leqslant u_n$. Par application du critère spécial des séries alternées, $\sum (-1)^n u_n$ converge.
d) Par monotonie

$$u_n + u_{n+2} \leqslant 2u_n \leqslant u_n + u_{n-2}$$

On en déduit $u_n \sim \frac{1}{2n}$ puis par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{u_n}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

Exercice 124 : [énoncé]
On a

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right) = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right)$$

Par le critère spécial, $\frac{(-1)^n}{n^a}$ est terme général d'une série convergente.
Par comparaison de séries à termes positifs

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right) \sim -\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2a}}$$

est terme général d'une série convergente si, et seulement si, $a > 1/2$.
Finalement, la série étudiée converge si, et seulement si, $a > 1/2$.

Exercice 125 : [énoncé]
On a

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(a+1)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Par suite $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $a = -1$.

Exercice 126 : [énoncé]
$u_n = \left(1 - \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)^n = \exp\left(-\frac{1}{n^{\alpha-1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)\right)$.
Si $\alpha \geqslant 1$ alors (u_n) ne tend pas vers zéro et $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
Si $\alpha \in \left]0,1\right[$ alors $n^2 u_n \to 0$ et $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 127 : [énoncé]
a) Si $\alpha \leqslant 1$ alors

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

et donc $u_n \to 0$ si $a \in [0,1[$, $u_n \to 1$ si $a = 1$ et (u_n) diverge si $a > 1$.
Si $\alpha > 1$ alors $\left(\sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}\right)$ converge et donc (u_n) aussi.
b) Cas $\alpha \leqslant 1$ et $a = 1$: $u_n = 1$, $v_n = 0$ et on peut conclure.
Cas $\alpha < 1$ et $a \in [0,1[$: $\ell = 0$, $v_n = u_n$, $n^2 v_n = \mathrm{e}^{2\ln n + \sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}\ln a} \to 0$ car

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Cas $\alpha = 1$ et $a \in [0,1[$: $\ell = 0$, $v_n = u_n = \mathrm{e}^{(\ln n + \gamma + o(1))\ln a} \sim \lambda n^{\ln a}$ donc $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\ln a < -1$ i.e. $a < -1/\mathrm{e}$.
Cas $\alpha > 1$: $\ell = a^{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}}$,

$$v_n = \ell(\mathrm{e}^{-\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}} - 1) \sim -\ell \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = -\frac{\ell}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Ainsi $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.
Dans chacun des cas précédents, on peut appliquer le critère spécial aux séries alternées et affirmer que $\sum (-1)^n v_n$ converge.

Exercice 128 : [énoncé]
a) f est décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$. Pour $p \geqslant 4$,

$$\int_p^{p+1} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln p}{p} \leqslant \int_{p-1}^p \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$$

donc $u_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + v_n$ avec

$$\int_4^{n+1} \frac{\ln t}{t} \mathrm{d}t \leqslant v_n \leqslant \int_3^n \frac{\ln t}{t} \mathrm{d}t$$

donc $v_n \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2$.
Etudions $w_n = u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2$, $w_n - w_{n-1} = \frac{\ln n}{n} - \int_{n-1}^n \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t \leqslant 0$ donc (w_n) est décroissante.
D'autre part les calculs précédents donnent (w_n) minorée et donc on peut conclure que w_n converge. Ainsi

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\ln n\right)^2 + C + o(1)$$

b)

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(2n)}{2n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(2n-1)}{2n-1}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(2n)}{n} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{\ln(n)}{n} = \ln 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} + u_N - u_{2N}$$

Par le développement asymptotique précédent, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \ln 2. \ln n + \ln(2)\gamma + \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C - \frac{1}{2}(\ln 2n)^2 - C + o(1)$$

et après simplification

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} \to \frac{1}{2} \ln(2)(2\gamma - \ln 2)$$

De plus

$$\sum_{n=1}^{2N+1} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} + o(1) \to \frac{1}{2} \ln(2)(2\gamma - \ln 2)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{2} \ln(2)(2\gamma - \ln 2)$$

N'est-ce pas magnifique ?

Exercice 129 : [énoncé]
$\frac{1}{k+\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k}$ et $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$ est une série à terme positif divergente donc $S_n \sim \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$.
Pour être plus précis,

$$S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+\sqrt{k}} - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{k^2 + k\sqrt{k}}$$

or

$$\frac{\sqrt{k}}{k^2 + k\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k^{3/2}}$$

et est donc le terme général d'une série convergente.
Ainsi $S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \to C'$ d'où

$$S_n = \ln n + (\gamma + C') + o(1) = \ln n + C + o(1)$$

Exercice 130 : [énoncé]
$\frac{1}{k^2+\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k^2}$ donc la série de terme général $\frac{1}{k^2+\sqrt{k}}$ est absolument convergente. Par suite (S_n) converge

$$C - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

car $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ est une série à termes positifs convergente.

Par comparaison série intégrale $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$ et on peut conclure comme annoncée.

Exercice 131 : [énoncé]
Par une comparaison avec une intégrale, on sait déjà

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$$

Il reste à déterminer un équivalent simple de la différence

$$d_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n}$$

Sachant que $\frac{1}{n}$ est le reste de rang n de la série convergente $\sum\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\sum\frac{1}{k(k-1)}$

$$d_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{-1}{k^2(k-1)}$$

Par équivalence de reste de séries à termes positifs convergentes

$$d_n\sim-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}$$

Par comparaison avec une intégrale

$$d_n\sim-\frac{1}{2n^2}$$

Finalement

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 132 : [énoncé]

a) On a

$$\ln u_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{3k}\right)$$

Or

$$\ln\left(1-\frac{1}{3k}\right)=-\frac{1}{3k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

donc

$$\ln u_n=-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}O\left(\frac{1}{k^2}\right)=-\frac{1}{3}\ln n+C+o(1)$$

car $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+o(1)$ et $\sum\limits_{n\geqslant1}O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est une série convergente.

b) Puisque

$$\ln(n^{1/3}u_n)\to\beta$$

on a

$$u_n\sim\frac{\mathrm{e}^{\beta}}{n^{1/3}}$$

et donc la série de terme général u_n diverge.

Exercice 133 : [énoncé]

a) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(nk+1)}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k(nk+1)}-\frac{1}{nk^2}\right)=\frac{\pi^2}{6n}-\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{nk^2(nk+1)}$ et

$0\leqslant\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{nk^2(nk+1)}\leqslant\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}$ donc $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(nk+1)}\sim\frac{\pi^2}{6n}$.

b) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(n+k)}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+k}\right)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\frac{\ln n}{n}$.

Exercice 134 : [énoncé]

a) Posons $v_n=n^{\alpha}u_n$.

$\ln v_{n+1}-\ln v_n=\alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1-\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

La série $\sum(\ln v_{n+1}-\ln v_n)$ est donc absolument convergente et par conséquent la suite $(\ln(v_n))$ converge.

Ainsi $v_n\to\mathrm{e}^{\ell}>0$ avec $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln v_n$ puis $u_n\sim\frac{\mathrm{e}^{\ell}}{n^{\alpha}}$.

Par équivalence de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha>1$.

b) On reprend ce qui précède en l'approfondissant.

Puisque le reste d'une série dont le terme général est en $O\left(1/n^2\right)$ est en $O\left(1/n\right)$, on a $\ln v_n=\ell+O\left(\frac{1}{n}\right)$ puis $u_n=\frac{\mathrm{e}^{\ell}}{n^{\alpha}}+O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$.

Pour que $\sum(-1)^n u_n$ converge, il est nécessaire que $u_n\to0$ et donc $\alpha>0$.

Inversement, si $\alpha>0$ alors $\sum(-1)^n\frac{\mathrm{e}^{\ell}}{n^{\alpha}}$ converge par le critère spécial et $\sum O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ est absolument convergente.

Finalement $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Exercice 135 : [énoncé]

Posons

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{2n-k}{z_n-k}\right|$$

On a

$$\ln P_n=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{|z_n-k|^2}{|2n-k|^2}$$

Puisque

$$|z_n-k|^2=(2n)^2-4nk\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)+k^2=(2n-k)^2+8nk\sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right)$$

on obtient

$$\ln P_n=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{8nk}{(2n-k)^2}\sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right)\right)$$

Sachant $\sin^2 u = u^2 + O(u^4)$, on peut écrire

$$\sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right) = \frac{t^2}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi

$$\ln P_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2}O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Sachant $\ln(1+x) \leqslant x$, on a

$$-2\ln(P_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2}O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

Posons S_n le second membre de cette comparaison. D'une part

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2n-k)^2}O\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2}O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$$

D'autre part

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{(2n-k)^2} = \sum_{\ell=n}^{2n-1}\frac{2(2n-\ell)}{\ell^2} = 4n\sum_{\ell=n}^{2n-1}\frac{1}{\ell^2} - 2\sum_{\ell=n}^{2n-1}\frac{1}{\ell}$$

avec

$$\sum_{\ell=n}^{+\infty}\frac{1}{\ell^2} \sim \frac{1}{n} \text{ et } \sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell} = \ln n + \gamma + o(1)$$

Après calculs asymptotiques, on obtient

$$S_n \to (2 - 2\ln 2)t^2$$

Sachant $\ln(1+x) \geqslant x - \frac{1}{2}x^2$, on a

$$-2\ln P_n \geqslant S_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2}O\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2$$

Puisque $0 \leqslant \frac{k}{(2n-k)^2} \leqslant \frac{1}{n}$,

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2}O\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2 = \sum_{k=1}^{n} O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$$

Finalement $-2\ln P_n$ est encadré par deux quantités de limite $(2-2\ln 2)t^2$. On en déduit

$$P_n \to \exp\left((\ln 2 - 1)t^2\right)$$

Exercice 136 : [énoncé]

a) Puisque

$$\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$$

on peut affirmer que l'ensemble

$$\left\{p \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} \geqslant j\right\}$$

est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Celle admet donc un plus petit élément, noté Φ_j.

b) Par définition de Φ_j, on a

$$j \leqslant \sum_{n=1}^{\Phi_j}\frac{1}{n}$$

Or, par comparaison avec une intégrale

$$\sum_{n=1}^{\Phi_j}\frac{1}{n} \leqslant 1 + \int_1^{\Phi_j}\frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 + \ln\Phi_j$$

On en déduit $\Phi_j \geqslant \mathrm{e}^{j-1}$ puis $\Phi_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} +\infty$.

c) Par définition de Φ_j, on a

$$\sum_{n=1}^{\Phi_j-1}\frac{1}{n} \leqslant j \leqslant \sum_{n=1}^{\Phi_j}\frac{1}{n}$$

Or, sachant que $\Phi_j \to +\infty$, on a

$$\sum_{n=1}^{\Phi_j}\frac{1}{n} = \ln\Phi_j + \gamma + o(1) \text{ et } \sum_{n=1}^{\Phi_j}\frac{1}{n} = \ln(\Phi_j - 1) + \gamma + o(1)$$

Par suite

$$\ln(\Phi_j - 1) + \gamma + o(1) \leqslant j \leqslant \ln\Phi_j + \gamma + o(1)$$

Or

$$\ln(\Phi_j - 1) = \ln\Phi_j + o(1)$$

donc

$$j = \ln\Phi_j + \gamma + o(1)$$

puis

$$\Phi_j = \mathrm{e}^{j-\gamma+o(1)}$$

On en déduit
$$\frac{\Phi_{j+1}}{\Phi_j}=\frac{\mathrm{e}^{j+1-\gamma+o(1)}}{\mathrm{e}^{j-\gamma+o(1)}}=\mathrm{e}^{1+o(1)}\to\mathrm{e}$$

Exercice 137 : [énoncé]

Posons $S_n=\sum_{k=1}^n u_k$. On observe que
$$\sum_{k=1}^n ku_n=(n+1)S_n-\sum_{k=1}^n S_k$$
Par suite
$$w_n=\frac{n+1}{n}v_n-\frac{1}{n^2u_n}\sum_{k=1}^n S_k\quad(\star)$$
.
Puisque $\frac{S_n}{nu_n}\to a$, on a $S_n\sim anu_n$.
La série de terme général S_n est une série à termes positifs divergente donc
$$\sum_{k=1}^n S_k\sim a\sum_{k=1}^n ku_k$$
Par suite
$$\frac{1}{n^2u_n}\sum_{k=1}^n S_k\sim aw_n$$
La relation $(\star)$ dévient alors
$$w_n=\frac{n+1}{n}v_n-aw_n+o(w_n)$$
et en on en déduit que
$$w_n\sim\frac{1}{a+1}v_n\to\frac{a}{a+1}$$

Exercice 138 : [énoncé]

a) On définit les suites u et v

```
u:=n->product(1+I/k^2,k=1..n);
v:=n->product(1+2*I/k,k=1..n);
```

Puis on figure les lignes polygonales

```
plot([seq([Re(u(p)),Im(u(p))],p=1..500)]);
```

```
plot([seq([Re(v(p)),Im(v(p))],p=1..n)]);
```

b) On peut écrire $u_n=\rho_n\mathrm{e}^{i\theta_n}$ avec
$$\rho_n=\prod_{k=1}^n\left|1+\frac{i}{k^2}\right|=\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{1}{k^4}\right)^{1/2}\text{ et }\theta_n=\sum_{k=1}^n\arctan\frac{1}{k^2}$$
Puisque
$$\ln\rho_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\ln\left(1+\frac{1}{k^4}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n O\left(\frac{1}{k^4}\right)\text{ et }\theta_n=\sum_{k=1}^n O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$
il y a convergence des suites $(\rho_n)_{n\geqslant1}$ et $(\theta_n)_{n\geqslant1}$.
On en déduit la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant1}$.
Puisque
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\arctan\frac{1}{k^2}\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leqslant\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{1}{n}$$
on obtient une valeur approchée de la limite (θ_n) à 10^{-2} près en considérant θ_{100}.

```
evalf(argument(u(100)));
```

On observe graphiquement que $\lim_{n\to+\infty}\rho_n\in[1,2]$. Puisque la fonction exp est 10-lipschitzienne sur $[1,2]$, il suffit de connaître $\lim(\ln\rho_n)$ à 10^{-3} près pour connaître $\lim\rho_n$ à 10^{-2} près.
Puisque
$$\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k^4}\right)\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}\leqslant\frac{1}{2}\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^4}=\frac{1}{6n^3}$$
on obtient une valeur approchée de la limite de $(\ln\rho_n)$ à 10^{-3} près en considérant $\ln\rho_6$.

```
evalf(abs(u(170)));
```

c) On a

$$\sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{1}{k} - \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} O\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

Sachant

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

on en déduit

$$\sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{2}{k} = 2\ln n + L + o(1)$$

avec $L \in \mathbb{R}$.
Etudions la suite (z_n). On a

$$z_{2n} = \exp(2i\ln 2)z_n$$

Si la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ converge, sa limite ℓ vérifie

$$\ell = \exp(2i\ln 2)\ell$$

ce qui entraîne $\ell = 0$.
C'est absurde car les complexes z_n sont tous de module 1. On en déduit que la suite (z_n) diverge.
Un argument de v_n est

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{2}{k} = 2\ln n + L + o(1)$$

de sorte que

$$v_n = |v_n|\,\alpha_n z_n$$

avec

$$|v_n| \geqslant 1, (\alpha_n) \to \alpha, |\alpha| = 1 \text{ et } (z_n) \text{ divergente}$$

On en déduit que la suite (v_n) diverge.

Exercice 139 : [énoncé]
a) Pour $\alpha > 1$, la série de terme général $1/n^\alpha$ converge et si l'on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

on observe

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} = S_{2n} - S_n \to \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 0$$

Pour $\alpha = 1$, on introduit les sommes partielles harmoniques

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

En notant γ la constante d'Euler, on peut écrire

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1)$$

et alors

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = H_{2n} - H_n = \ln 2 + o(1) \to \ln 2$$

b) Par l'égalité de Taylor avec reste intégral, on peut écrire

$$\sin x = x + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}\sin^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sin^{(3)}(t) = -\cos(t) \in [-1,1]$$

on a

$$\forall x \geqslant 0, \sin x \geqslant x - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}\,\mathrm{d}t = x - \frac{1}{6}x^3$$

D'autre part, il est bien connu que

$$\forall x \geqslant 0, \sin(x) \leqslant x$$

On en déduit

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{6}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^3} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

En vertu de ce qui précède, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right) = \ln 2$$

Exercice 140 : [énoncé]
n_p est bien défini car $H_n \to +\infty$.
La suite (n_p) est croissante et évidemment non majorée donc

$$n_p \to +\infty$$

Par définition de n_p, on a

$$H_{n_p} \geqslant p \geqslant H_{n_p - 1}$$

Or

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1)$$

donc

$$\ln n_p + \gamma + o(1) \geqslant p \geqslant \ln(n_p - 1) + \gamma + o(1)$$

Puisque

$$\ln(n_p - 1) = \ln n_p + o(1)$$

on obtient

$$p = \ln n_p + \gamma + o(1)$$

puis

$$n_p = \mathrm{e}^{n-\gamma+o(1)} \sim \mathrm{e}^{n-\gamma}$$

Exercice 141 : [énoncé]
a) Puisque $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante : $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

b) Par suite $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ a un sens si, et seulement si, $\alpha > 2$.

c) Posons $u_{k,n} = \frac{1}{k^\alpha}$ si $k > n$ et $u_{k,n} = 0$ sinon.

Pour tout $n \geqslant 1$, $\sum_{k\geqslant 0} |u_{k,n}|$ converge et $\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{k,n}|$ converge donc on peut appliquer la formule de Fubini et affirmer
$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n}$ avec convergence des séries sous-jacentes.
Or $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{k^{\alpha-1}}$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$.

Exercice 142 : [énoncé]
La série converge compte tenu des critères usuels.

$$\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\right)$$

Par télescopage :

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2p-1}\right)$$

De plus

$$\sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n^2-p^2} = -\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p-1} + \cdots + 1 + \frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{2p-1}\right)$$

donc

$$\sum_{n=1, n\neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p}\right) = \frac{3}{4p^2}$$

puis

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1,n\neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{3}{4p^2} > 0$$

Cependant

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1,p\neq n}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{4n^2} = -\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{3}{4p^2}$$

donc

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1,n\neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2} \neq \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1,p\neq n}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2}$$

Exercice 143 : [énoncé]
$\sum\limits_{p\geqslant 1} u_{p,q}$ est absolument convergente et

$$\sum_{p=1}^{+\infty} |u_{p,q}| = \frac{|a|^{2q-1}}{1-|a|^{2q-1}}$$

De plus la série de terme général $\frac{|a|^{2q-1}}{1-|a|^{2q-1}}$ est absolument convergente en vertu de la règle de d'Alembert donc les séries suivantes existent et on a

$$\sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q}$$

ce qui fournit la relation

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{a^{2q-1}}{1-a^{2q-1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^p}{1-a^{2p}}$$

Exercice 144 : [énoncé]
$\sum\limits_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} = 0$ donc $\sum\limits_{q=0}^{+\infty}\sum\limits_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} = 0$. $\sum\limits_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$ donc $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\sum\limits_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = 1$.
Le Théorème de Fubini ne s'applique par à la série double de terme général $a_{p,q}$

Exercice 145 : [énoncé]
Pour $|z|<1$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^{2^n} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k} = \sum\limits_{n,k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)} = \sum\limits_{m=1}^{+\infty} z^m = \frac{z}{1-z}$.
Pour $|z|=1$, $\left|\frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}\right| \geqslant \frac{1}{2}$ donc $\frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il y a donc divergence grossière.
Pour $|z|>1$, $\frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \frac{(1/z)^{2^n}}{(1/z)^{2^{n+1}}-1}$ et $|1/z|<1$ donc
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = -\frac{1/z}{1-1/z} = \frac{1}{1-z}$.

Exercice 146 : [énoncé]
Pour $t=-1$, $\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} t^{i+j+1} = -(m+1)(n+1)$ ce qui permet de conclure.
Pour $t\neq -1$, $\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} t^{i+j+1} = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i t^{i+1} \frac{1-(-t)^{m+1}}{1+t}$.
Quand $m\to+\infty$, $\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} t^{i+j+1} \to \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{t^{i+1}}{1+t}$ si $|t|<1$ et diverge sinon.
$\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{t^{i+1}}{1+t} = t\frac{1-(-t)^{n+1}}{(1+t)^2}$.
Quand $n\to+\infty$, $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} t^{i+j+1} \to \frac{t}{(1+t)^2}$.

Exercice 147 : [énoncé]
Le terme $u_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ est bien défini en tant que reste d'une série satisfaisant au critère spécial des séries alternées.
Pour $N\leqslant K$ entiers, $\sum\limits_{n=1}^{N}\sum\limits_{k=n}^{K} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum\limits_{k=1}^{N}\sum\limits_{n=1}^{k} \frac{(-1)^k}{k^2} + \sum\limits_{k=N+1}^{K}\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k^2}$.
D'une part $\sum\limits_{k=1}^{N}\sum\limits_{n=1}^{k} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k}$. D'autre part
$\sum\limits_{k=N+1}^{K}\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k^2} = N\sum\limits_{k=N+1}^{K} \frac{(-1)^k}{k^2}$.
En passant à la limite quand $K\to+\infty$: $\sum\limits_{n=1}^{N} u_n = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k} + N\sum\limits_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.
Or $\sum\limits_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$ donc quand $N\to+\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{N} u_n \to \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.
Ainsi $\sum u_n$ est convergente et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln 2$.

Exercice 148 : [énoncé]
La fonction $x\mapsto 1-\cos x - x$ est négative sur $[0,+\infty[$ et ne s'annule qu'en 0. Par conséquent, la suite (u_n) est décroissante, or elle est clairement minorée par 0 donc elle converge et annulant la précédente fonction ne peut être que 0. Puisque $u_{n+1} = 2\sin^2\frac{u_n}{2}$ on a $u_{n+1}\leqslant \frac{1}{2}u_n^2$. Par suite $u_n = O\left(1/2^n\right)$ et donc la série des u_n converge.

Exercice 149 : [énoncé]
$\ell = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ est la seule limite possible de la suite (u_n) qui est clairement à termes positifs.
$|u_{n+1}-\ell| = \frac{|u_n-\ell|}{\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+\ell}} \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\ell|$ donc $u_n = O(1/2^n)$ et ainsi la série converge.

Exercice 150 : [énoncé]
a) Aisément la suite est strictement positive, décroissante et de limite $\ell \in [0, \pi/2]$ vérifiant $\sin \ell = \ell$.
b) $u_{n+1} - u_n$ est le terme général d'une série télescopique convergente. Or $u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{6}u_n^3$ donc par équivalence de suite de signe constant, on conclut.
c) $\ln u_{n+1} - \ln u_n$ est le terme général d'une série télescopique divergente. Or $\ln u_{n+1} - \ln u_n \sim \ln\left(1 - \frac{1}{6}u_n^2\right) \sim -\frac{1}{6}u_n^2$ donc par équivalence de suite de signe constant, on conclut.

Exercice 151 : [énoncé]
La suite (a_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente. En passant la relation de récurrence à la limite, on obtient que (a_n) tend vers 0.
Puisque

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} = \frac{a_n^2 - a_{n+1}^2}{a_n^2 a_{n+1}^2} \sim \frac{1}{3}$$

on obtient par le théorème de Césaro

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}^2} - \frac{1}{a_k^2}\right) \to \frac{1}{3}$$

puis

$$\frac{1}{n}\frac{1}{a_n^2} \to \frac{1}{3}$$

Finalement $a_n \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$ et la série étudiée est divergente.

Exercice 152 : [énoncé]
a) La suite (a_n) est bien définie et à termes positifs puisque pour tout $x \geqslant 0$, $1 - \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$.
Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \leqslant 1 + x$, on a $a_{n+1} \leqslant a_n$ et la suite (a_n) est donc décroissante.
Puisque décroissante et minorée, (a_n) converge et sa limite ℓ vérifie $\ell = 1 - \mathrm{e}^{-\ell}$.
On en déduit $\ell = 0$.
Finalement (a_n) décroît vers 0.
b) Par le critère spécial des séries alternées, $\sum (-1)^n a_n$ converge.
c) Puisque $a_n \to 0$, on peut écrire $a_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-a_n} = a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2)$.
Par suite $a_n^2 \sim -2(a_{n+1} - a_n)$.
Par équivalence de séries à termes positifs, la nature de la série de terme général a_n^2 est celle de la série de terme général $a_{n+1} - a_n$ qui est celle de la suite de terme général a_n. Finalement $\sum a_n^2$ converge.
d) La nature de la série de terme général $\ln(a_{n+1}/a_n)$ est celle de la suite de terme général $\ln(a_n)$. C'est donc une série divergente. Or

$$\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}a_n + o(a_n)\right) \sim -\frac{1}{2}a_n$$

Par équivalence de série de terme de signe constant, on peut affirmer $\sum a_n$ diverge.

Exercice 153 : [énoncé]
La suite (u_n) est à terme strictement positifs car $u_0 > 0$ et la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ laisse stable l'intervalle $]0, +\infty[$.
Puisque pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1 + x) \leqslant x$, la suite (u_n) est décroissante.
Puisque décroissante et minorée, la suite (u_n) converge et sa limite ℓ vérifie $\ln(1 + \ell) = \ell$ ce qui donne $\ell = 0$.

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} \sim \frac{\frac{1}{2}u_n^2}{u_n^2} \to \frac{1}{2}$$

Par le théorème de Cesaro,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) \to \frac{1}{2}$$

et donc

$$\frac{1}{nu_n} \to \frac{1}{2}$$

On en déduit $u_n \sim \frac{2}{n}$ et donc la série de terme général u_n diverge.

Exercice 154 : [énoncé]
a) $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et $u_n \in]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (u_n) converge et la seule limite possible est 0.

$$\sum_{n=0}^{N} u_n^2 = \sum_{n=0}^{N} u_n - u_{n+1} = u_0 - u_{N+1} \to u_0$$

donc $\sum u_n^2$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = u_0$$

On a
$$\sum_{n=0}^{N}\ln(1-u_n)=\ln\left(\prod_{n=0}^{N}\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\ln\frac{u_{N+1}}{u_0}\to-\infty$$
donc la série numérique $\sum\ln(1-u_n)$ diverge.
b) Puisque
$$\ln(1-u_n)\sim-u_n$$
Par équivalence de séries à termes de signe constant, $\sum u_n$ diverge.

Exercice 155 : [énoncé]
Dans le cas où $u_0=0$, la suite est nulle. On suppose désormais ce cas exclu.
a) La suite (u_n) est à termes dans $]0,1]$ car l'application $x\mapsto x-x^2$ laisse stable cet intervalle.
La suite (u_n) est décroissante et minorée donc convergente. Sa limite ℓ vérifie $\ell=\ell-\ell^2$ et donc $\ell=0$.
Finalement (u_n) décroît vers 0 par valeurs strictement supérieures.
$\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}=\frac{u_n-u_{n+1}}{u_nu_{n+1}}=\frac{u_n^2}{u_n^2-u_n^3}\to1$. Par le théorème de Cesaro,
$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}}-\frac{1}{u_k}\right)\to1$ et donc $\frac{1}{nu_n}\to1$.
On en déduit que $u_n\sim\frac{1}{n}$ et donc $\sum u_n$ diverge.
b) Comme ci-dessus, on obtient que (u_n) décroît vers 0 par valeurs strictement supérieures.
$\frac{1}{u_{n+1}^\alpha}-\frac{1}{u_n^\alpha}=\frac{u_n^\alpha-u_{n+1}^\alpha}{(u_nu_{n+1})^\alpha}\sim\frac{\alpha u_n^\alpha}{u_{n+1}^\alpha}\to\alpha$. Par le théorème de Cesaro, $\frac{1}{nu_n^\alpha}\to\alpha$ et donc $u_n\sim\frac{\lambda}{n^{1/\alpha}}$ avec $\lambda>0$.
Si $\alpha\in]0,1[$, $\sum u_n$ converge et si $\alpha\geqslant1$, $\sum u_n$ diverge.

Exercice 156 : [énoncé]
La suite (u_n) est croissante.
Si (u_n) converge alors sa limite ℓ est strictement positive et
$$a_n\sim\ell(u_{n+1}-u_n)$$
est le terme général d'une série convergente par équivalence des termes généraux de signe constant.
Si $\sum a_n$ converge alors
$$0\leqslant u_{n+1}-u_n\leqslant a_n/u_0$$
donc par comparaison la série de terme général $u_{n+1}-u_n$ converge et donc (u_n) converge.

Exercice 157 : [énoncé]
Posons $v_n=u_n^\beta$. La suite (v_n) vérifie $v_n\in]0,1]$ et $v_{n+1}=\sin(v_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Puisque la fonction sinus laisse stable l'intervalle $]0,1]$, on peut affirmer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n\in]0,1]$.
De plus, pour $x\geqslant0$, $\sin x\leqslant x$ donc la suite (v_n) est décroissante.
Puisque décroissante et minorée, (v_n) converge et sa limite ℓ vérifie $\sin\ell=\ell$ ce qui donne $\ell=0$.
Finalement (v_n) décroît vers 0 par valeurs strictement supérieures.
On a $\frac{1}{v_{n+1}^2}-\frac{1}{v_n^2}=\frac{(v_n-v_{n+1})(v_{n+1}+v_n)}{v_n^2v_{n+1}^2}\sim\frac{\frac{1}{6}v_n^3\times2v_n}{v_n^4}\to\frac{1}{3}$. Par le théorème de Cesaro, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{v_{k+1}^2}-\frac{1}{v_k^2}\right)\to\frac{1}{3}$ et donc $\frac{1}{nv_n^2}\to\frac{1}{3}$. On en déduit $v_n\sim\frac{\sqrt{3}}{n^{1/2}}$ puis $u_n\sim\frac{\lambda}{n^{1/2\beta}}$ avec $\lambda>0$.
Pour $\beta\in]0,2[$, $\sum v_n$ converge et pour $\beta\geqslant2$, $\sum v_n$ diverge.

Exercice 158 : [énoncé]
a) Notons la suite (u_n) est bien définie, strictement positive et croissante.
Si $\alpha>1$, on a
$$u_{n+1}\leqslant u_n+\frac{1}{n^\alpha u_1}$$
puis par récurrence
$$u_n\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha u_1}$$
Ainsi (u_n) converge.
Si (u_n) converge. Posons $\ell=\lim u_n$, on observe $\ell>0$. On a
$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n^\alpha u_n}\sim\frac{1}{n^\alpha\ell}$$
or la série de terme général $u_{n+1}-u_n$ est convergente donc $\alpha>1$.
b) On suppose $\alpha\leqslant1$. On a
$$u_{n+1}^2-u_n^2=\frac{2}{n^\alpha}+\frac{1}{n^{2\alpha}u_n^2}\sim\frac{2}{n^\alpha}$$
donc par sommation de relation de comparaison de séries à termes positifs divergentes
$$u_n^2\sim2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$$

or par comparaison série-intégrale,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ quand } \alpha < 1$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n \text{ quand } \alpha = 1$$

On conclut alors

$$u_n \sim \sqrt{\frac{2n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \text{ si } \alpha < 1 \text{ et } u_n \sim \sqrt{2\ln n} \text{ si } \alpha = 1$$

c) On suppose $\alpha > 1$. Posons $v_n = u_n - \ell$. On a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n^\alpha u_n} \sim \frac{1}{n^\alpha \ell}$$

donc par sommation de relation de comparaison de séries à termes positifs convergentes

$$\sum_{k=n}^{+\infty} v_{k+1} - v_k = -v_n \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{\ell n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{\ell n^{\alpha-1}}$$

puis

$$v_n = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{\ell n^{\alpha-1}}$$

Exercice 159 : [énoncé]
Il s'agit d'une somme de termes positifs.
$\sum\limits_{p=2}^{+\infty} \sum\limits_{m+n=p, m,n\geqslant 1} \frac{1}{(m+n)^\alpha} = \sum\limits_{p=2}^{+\infty} \frac{p-1}{p^\alpha} < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 2$. Colles Spé - Familles sommables

Exercice 160 : [énoncé]
a) Puisque $v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to-\infty]{} 0$ donc (v_n) est bornée par un certain M.
On a $|u_k v_{n-k}| \leqslant M |u_k|$ donc $(u_k v_{n-k})$ est sommable.
b)
$\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left|\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}\right| \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|\,|v_{n-k}| = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |v_{n-k}| = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| \sum\limits_{\ell\in\mathbb{Z}} |v_\ell| < +\infty$
donc $u \star v \in \ell^1(\mathbb{Z})$.
De plus
$\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} (u\star v)_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k} \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} v_{n-k} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k \sum\limits_{\ell\in\mathbb{Z}} v_\ell$
c) On a $(u\star v)_n = \sum\limits_{k+\ell=n} u_k v_\ell = (v\star u)_n$,
$((u\star v)\star w)_n = \sum\limits_{k+\ell+m=n} u_k v_\ell w_m = (u\star(v\star w))_n$.
Pour ε définie par $\varepsilon_n = \delta_{n,0}$, $u\star\varepsilon = u$ donc ε est élément neutre.
d) Considérons u définie par $u_n = \delta_{0,n} - \delta_{1,n}$.
Si u est inversible et v son inverse, la relation $u\star v = \varepsilon$ donne
$v_n - v_{n-1} = \varepsilon_n = \delta_{0,n}$.
Par suite pour tout $n\in\mathbb{N}, v_n = v_0$ et puisque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, pour tout $n\in\mathbb{N}, v_n = 0$. De même pour tout $n < 0, v_n = 0$
Mais alors, pour $n = 0$, $v_n - v_{n-1} = \delta_{0,n}$ donne $0 = 1$.
L'élément u n'est pas inversible et donc $(\ell^1(\mathbb{Z}),\star)$ n'est pas un groupe. Etude 002.doc

Exercice 161 : [énoncé]
Pour $x \in \left]-1,1\right[$, on peut écrire

$$\frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} x^{k\ell}$$

Par suite

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{+\infty} x^{k\ell}$$

En réorganisant les termes du second membre (ce qui est possible car il y a absolue convergence et donc la famille correspondante est sommable), on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{+\infty} x^{k\ell} = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n$$

avec

$$d_n = \operatorname{Card}\left\{(k,\ell)\in\mathbb{N}^\star / k\ell = n\right\}$$

d_n apparaît alors comme étant le nombre de diviseurs positifs de n ce qui entraîne la relation demandée.

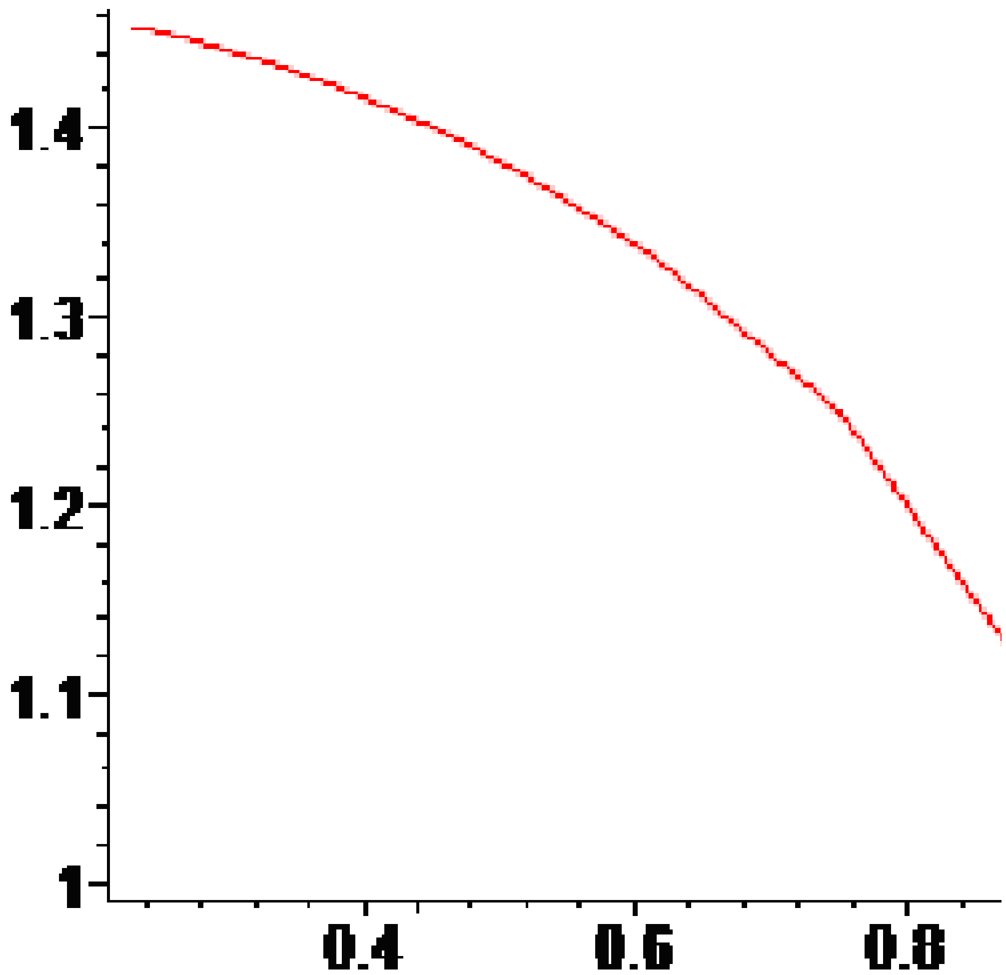

FIGURE 1 – La ligne polygonale $A_1, A_2, \dots, A_n$ avec $n = 500$

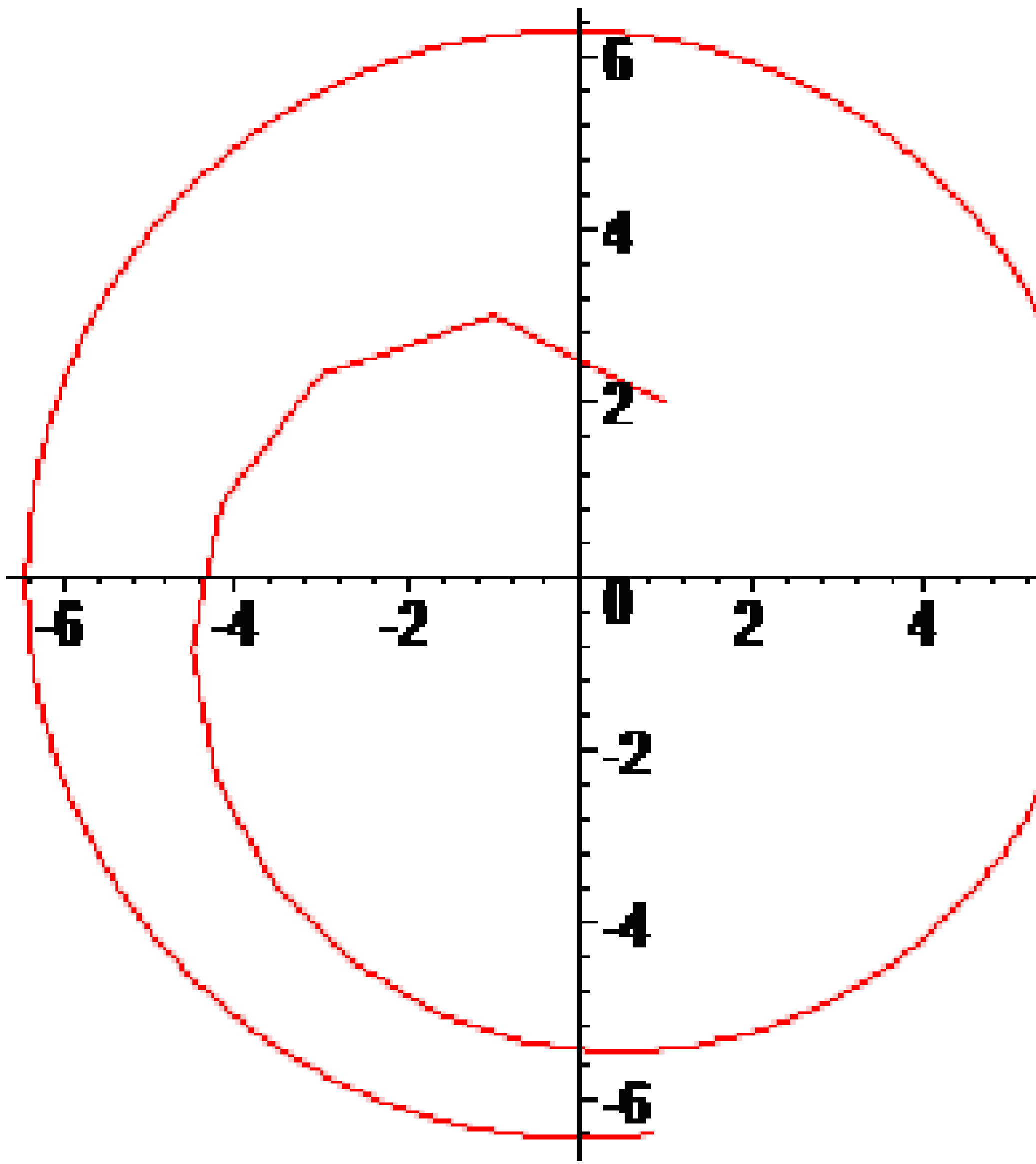

FIGURE 2 – La ligne polygonale $B_1, B_2, \dots, B$ avec $n = 500$